

LE PROVE DI CARICO NEL COLLAUDO DEI SOLAI.
CONSIDERAZIONI TEORICHE E PROPOSTE OPERATIVE

Prof. Ing. Giorgio Nicola Siniscalco
Dott. Ing. Nicola Mordà
Dott. Ing. Giovanni Mario Cavallero

SI.ME.TE S.R.L TORINO
DOMO STUDIO TORINO
ITALFERR TORINO

Sommario

Il contributo propone la descrizione di una procedura semplificata da applicare nelle prove di carico per il collaudo di strutture orizzontali, mediante l'ausilio di un'esposizione teorica per la determinazione dei coefficienti di vincolo sulla struttura reale, sia per carichi di prova distribuiti sia per carichi concentrati.

Vengono inoltre presentati alcuni esempi pratici con funzione esplicativa per varie casistiche di collaudi statici effettuati dal Siniscalco correlatore della presente nota.

A. PREMESSE E PRINCIPI TEORICI

Nei collaudi dei solai di edifici ed in strutture orizzontali in genere, quali solettoni, anche misti, si presenta la necessità di determinare alcuni parametri della struttura realizzata, quasi sempre incerti e, tuttavia, fondamentali per il confronto fra freccia di prova e freccia teorica della struttura in opera, quest'ultima spesso determinata in misura non propriamente conforme a quella ipotizzata in progetto.

La valutazione di tali parametri non può essere affidata ad interpretazioni o ad ipotesi semplificative, posto che ciò non consentirebbe un valido confronto, generando una sorta di indeterminatezza nella stima della reale collaudabilità della costruzione.

In particolare, le frecce della struttura sotto carico sono influenzate dalle coppie di vincolo alle estremità dell'elemento caricato, imposte in fase di calcolo ma, come accennato, incerte nel corso dell'effettivo svolgimento dell'opera.

Si rende, quindi, indispensabile determinare, con sufficiente approssimazione, il valore delle frecce, al fine di consentirne il divisato confronto. Prendendo spunto e sviluppando una proposta formulata negli anni '80 dal Prof. G. Morelli sarà dato corso ad un'esposizione teorica generale riportando alcuni casi di prove di carico, adottate *more solito* con la presentazione dei coefficienti correttivi preventivamente calcolati, i quali si mostrano necessari per la determinazione della freccia teorica da confrontare con quelle effettive riscontrate, in fase di carico, nel corso delle prove di collaudo. È bene sottolineare che tali coefficienti, per assumere rilevanza, richiedono un alto numero di decimali, poiché spesso presentano valori molto esigui, che meritano di essere espressi con numeratore e denominatore in forma intera.

Com'è, inoltre, noto, nella generalità dei casi l'impronta del carico di prova non copre l'intero solaio, essendo caricata unicamente una striscia. Occorre, quindi, preventivamente valutare l'effetto di collaborazione esercitato dalle zone di solaio adiacenti alla striscia caricata, e determinare il coefficiente K_1 di riduzione del carico di prova sulla striscia di solaio sottoposta a carico. La determinazione di K_1 verrà successivamente presentata.

La larghezza di tale striscia b , pur non essendo strettamente vincolante, deve rispettare il rapporto suggerito da Pereswiet – Soltan [1] :

$$n = \frac{b}{\ell} = \frac{\text{larghezza del carico}}{\text{luce di campata}} > 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2 + \frac{q}{p_2}}} \quad (1)$$

dove: $q = K_1 p$ rappresenta il carico ridotto dovuto alla ripartizione trasversale e $p_2 =$ peso del carico esistente sulla struttura al momento della prova ciò vale anche per carichi concentrati.

Il metodo di collaudo che viene presentato può essere utilizzato anche per solai pieni, o strutture orizzontali composte da travi affiancate collegate con soletta.

Pur tuttavia, è necessario che l'elemento da collaudare disponga di una morfologia strutturale definita, con materiali omogenei e sufficientemente definiti nel loro sviluppo. Ciò postula che siano uniformi e costanti, per l'intera lunghezza, sia il modulo elastico E sia il momento d'inerzia J . Se così non fosse, come si verifica nel caso di sezioni di spessore variabile, il calcolo

risulterebbe notevolmente più complesso; nella doppia integrazione dell'equazione base della deformata $\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{M}{EJ}$ si

dovrebbe, infatti, considerare la variabilità del denominatore lungo l'asse x , oltre a quella normale del momento flettente causato dal carico di prova e dalle coppie d'incastro.

Deve, inoltre, notarsi che il metodo condurrebbe a risultati inattendibili ove gli elementi della struttura fossero ragguardevolmente variabili, come si verifica per i solai composti da vecchie travi in legno spesso, fessurate longitudinalmente, collegate con travi secondarie ed assito superiore, affiancato e collegato (foto 1e 2), o per i solai di cui sia dubbia e/o non accertabile la consistenza.

In queste ultime ipotesi, risulta particolarmente efficace ed attendibile l'applicazione della normativa americana ACI 318-08 [2], la quale, in estrema sintesi, propone di capovolgere la metodologia di approccio al problema; essa, infatti, introduce criteri concettualmente simili a quelli praticati nei collaudi di mezzi meccanici: ossia, rifiuta l'analisi di singoli



Foto 1: Solaio in legno misto



Foto 2: Trave in legno fessurata longitudinalmente

componenti e impone una severa prova d'uso del mezzo. Con riguardo a queste tipologie di solaio, non è, pertanto, opportuno indulgere ad una minuta indagine della struttura sceverando le singole componenti che la formano, bene essendo, al contrario, sottoporla ai carichi che si intendono impiegare per il collaudo, opportunamente moltiplicati per un coefficiente, suddiviso, in genere, in quattro step successivi coefficiente che è a discrezione del collaudatore.

Se la freccia risulta nei limiti definiti dalla normativa, funzione dello spessore del solaio e della sua luce ed il ritorno è sufficientemente elastico, il collaudo risulta valido.

B. INQUADRAMENTO GENERALE DEL METODO SOTTO IL PROFILO TEORICO

Mediante il metodo proposto, nei collaudi statici la determinazione dei valori dei momenti di incastro viene dedotta dalle misure degli spostamenti effettuati in sito ed è, quindi, fondata su uno schema teorico di trave elastica, alla Bernoulli, con incastri cedevoli, i quali sono simulati applicando alla trave le coppie m_1 ed m_2 , incognite a priori.

Per la determinazione delle coppie si ricorre, in generale, al seguente schema teorico.

Si consideri la trave riportata nella figura 1, soggetta ad un carico generico $q = q(x)$ (carico di prova nel caso in esame), ed alle coppie di estremità m_1 ed m_2 (incognite).

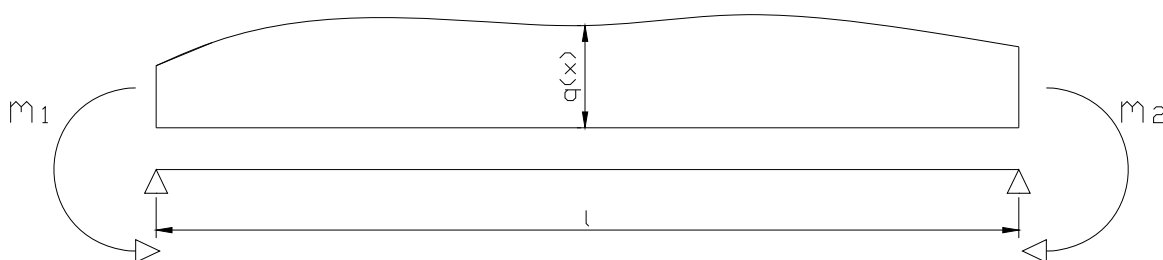


Figura 1: schema statico della trave

Lo spostamento in una generica sezione j si esprime come:

$$w(x_j) = w_0(x_j) + w_1(x_j) + w_2(x_j); \quad (2)$$

dove:

$w_0(x)$ = spostamenti generati dal carico $q(x)$ sulla trave semplicemente appoggiata;

$w_k(x)$ = spostamenti generati dalle coppie di estremità m_k ossia m_1, m_2 sulla trave semplicemente appoggiata.

In linea generale gli spostamenti precedenti si esprimono con:

$$w_0(x) = \frac{\alpha(x)q^*l^4}{(EJ)} ; \quad (3)$$

dove q^* indica il carico equivalente, nel senso dei Lavori Virtuali ¹, e ancora:

$$w_k(x) = \frac{\beta_k(x)m_k l}{(EJ)} \quad \text{con} \quad k = 1,2 \quad (4)$$

La freccia teorica in un generico punto si esprime con:

$$\eta(x_j) = \frac{1}{(EJ)} \left[\alpha(x_j)q^*l^4 + \sum_{k=1}^2 \beta_k(x_j)m_k l \right] \quad (5)$$

Secondo lo schema di collaudo riportato ai punti successivi, si individuano, in genere, tre sezioni di lettura delle frecce: a $l/4$, $l/2$ e $3l/4$ (quarti della luce).

Si indicano con f_a, f_m, f_b le frecce lette nelle suddette sezioni; in base alla (5) si ha

$$f_j = \frac{1}{(EJ)_r} \left[\alpha(x_j)q^*l^4 + \sum_{k=1}^2 \beta_k(x_j)m_k l \right] \quad \text{con} \quad j = a, m, b \quad (6)$$

Si noti che nella (6) il fattore di rigidezza (EJ) è indicato col pedice "r" per chiarire che è riferito alle condizioni della struttura in sito, il cui valore reale resta incognito. Di esso può formularsi una stima teorica in base al momento d'inerzia J ed al valore presunto o determinato *in situ* sulla struttura reale per il modulo elastico E ; il valore teorico si indica con $(EJ)_r$.

La (6) può essere scritta per il punto (a) ad $\frac{1}{4}$ della luce $\frac{(EJ)_r}{l} f_a = C_a + B_{1a}m_1 + B_{2a}m_2$ dove con riferimento alla (2) C_a è la w_0 in (a) dovuta al carico, $B_{1a}m_1$ è lo spostamento w_1 in (a)

¹ Considerata una trave in semplice appoggio con un carico distribuito con legge generica $q=q(x)$ (fig.1) e si indica con $M_0=M_0(x)$ il diagramma dei momenti corrispondente (si trascura il contributo del taglio ma il discorso non perde generalità). Lo spostamento η in una sezione generica x è deducibile applicando il teorema dei lavori virtuali: applicato una forza di valore unitario, duale dello spostamento da ricercare, nella sezione in esame e detto $M_1=M_1(x)$ il diagramma della sollecitazione interna

corrispondente, lo spostamento risulta $w_0(x) = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_0(x)M_1(x)dx$ (i)

Il diagramma dei momenti $M_0 = M_0(x)$ può porsi nella forma $M_0 = q_0\mu_0(x)$ essendo q_0 un parametro che caratterizza il carico. Ad esempio nel caso di carico uniforme costante di valore q_u si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0(x) = q_u \frac{\ell}{2} x - q_u \frac{x^2}{2} = q_u \frac{\ell^2}{2} \left[\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right] \\ \text{Ponendo} \\ q_0 = q_u \frac{\ell^2}{2} \\ \mu_0(x) = \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \\ M_0(x) = q_0 \cdot \mu_0(x) \end{array} \right.$$

Pertanto nell'equazione (i) si ha $w_0(x) = \frac{1}{EJ} q_0 \int_0^l \mu_0(x)M_1(x)dx$ ponendo $q^* = \frac{q_0}{\alpha(x)\ell^4} \int_0^l \mu_0(x)M_1(x)dx$

si ha $w_0(x) = \frac{1}{EJ} q^* \alpha(x)\ell^4$ (3)

dovuto alla coppia m_1 e $B_{2a} * m_2$ è lo spostamento w_2 in (a) dovuto alla coppia m_2 all'altra estremità della struttura caricata, e semplicemente appoggiata. Similmente si ha per f_m in mezzeria f_b a $3/4$ della luce.

Si calcolano i rapporti:

$$R_j = \frac{f_j}{f_m} \quad \text{con } j = a, b.$$

Tali valori sono noti direttamente dalle frecce misurate in sito e sono indipendenti dal fattore (EJ) .

Utilizzando la (6), dove m_k rappresenta unicamente le due coppie di estremità, con rapidi passaggi la (7), esplicitata per le frecce ai quarti della luce della trave, conduce alle seguenti formule:

$$\begin{aligned} \frac{C_a + B_{1a} m_1 + B_{2a} m_2}{C_m + B_{1m} m_1 + B_{1m} m_2} &= \frac{f_a}{f_m} \\ \frac{C_b + B_{1b} m_1 + B_{2b} m_2}{C_m + B_{1m} m_1 + B_{1m} m_2} &= \frac{f_b}{f_m} \end{aligned} \quad (7)$$

La (8) conduce ad un sistema di due equazioni nelle incognite $\{m_1, m_2\}$ che dipende solo dalla posizione dei carichi e dalle frecce misurate. Non è presente alcun valore riferito alla rigidezza della struttura $(E o J)$.

La deduzione dei momenti di estremità consente quindi, riapplicando la (5) con il valore teorico di (EJ) , di valutare la freccia attesa in mezzeria f_t , da confrontare con la freccia misurata f_m , quindi, di esprimere un giudizio sull'esito della prova.

Lo schema appena esposto si applica indipendentemente dalla tipologia dei carichi usati per la prova.

Nei successivi paragrafi, a titolo esemplificativo, si applica la procedura indicata in termini concettuali, per la deduzione in forma chiusa di alcune formule relative a situazioni ricorrenti nelle procedure di collaudo.

Lo schema generale resta valido, come riferimento, per l'applicazione in casi differenti da quelli riportati.

Con riferimento alla figura 2 si presenta la ripartizione trasversale tipica

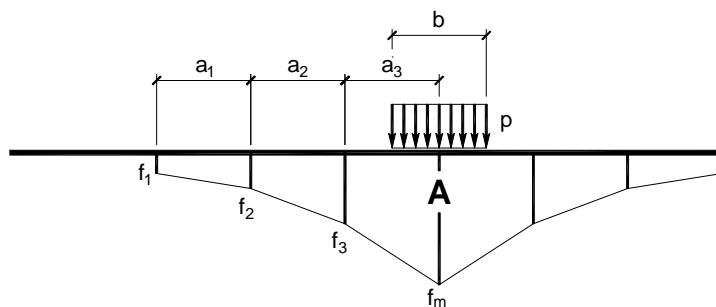


Figura 2: schema di posa del carico di collaudo

Il carico di prova p è solitamente distribuito su una "impronta" di solaio limitata. Ciò avviene in vari modi: caricando una striscia di larghezza b sull'intera lunghezza del solaio o per una lunghezza più limitata o utilizzando carichi concentrati.

Tali porzioni di solaio limitrofe collaborano a sostenere il carico agente sulla striscia di larghezza b caricata. Tale striscia di carico può considerarsi, quindi, soggetta ad un carico inferiore. Il coefficiente K_1 di riduzione è definito da una legge ricavata dalle letture delle frecce in opportuni punti del solaio in una sezione trasversale.

Ponendo alcuni flessimetri su un lato del carico (fig.2), con un solaio simmetrico dal lato opposto si ha:

$$A = (f_1 + f_2) a_1 + (f_2 + f_3) a_2 + (f_3 + f_m) a_3;$$

$$q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = K_1 p \quad \text{Ⓢ}$$

dove: K_1 risulta minore dell'unità.

Il carico q da considerare per la verifica della striscia di solaio larga b è quindi inferiore al carico p posto in opera.

Un'ulteriore, fondamentale, condizione risiede nella necessità di acquisire conoscenza del grado di incastro che i vincoli esercitano agli estremi del solaio di prova. Spesso, infatti, il solaio sottoposto alla prova si trova in relazione di continuità con altri solai, senza, poi, dimenticare che le stesse travi di bordo esercitano un certo grado d'incastro, ipotizzato sí in fase di progetto, e tuttavia da accertare e definire in fase di avvenuta realizzazione e/o di collaudo.

È, quindi, essenziale acquisire conoscenza di m_1 e m_2 (fig. 3).

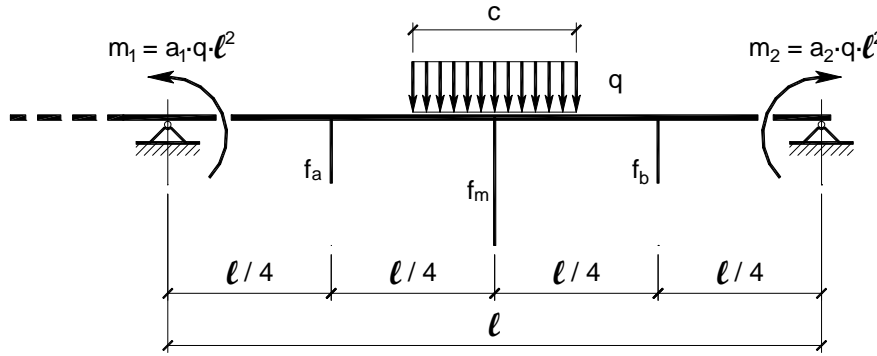


Figura 3: schema di calcolo

i quali influenzano le frecce effettive della struttura in essere e sono fondamentali per il calcolo della freccia teorica del solaio realizzato. Tali valori sono enucleabili con la lettura, durante la prova, della freccia in mezzeria e a 1/4 della luce (fig. 3), entrambe depurate dagli eventuali cedimenti dei vincoli.

Posti $m_1 = a_1 \cdot q \cdot l^2$, ed $m_2 = a_2 \cdot q \cdot l^2$, si determinano i coefficienti a_1 ed a_2 .

Vengono, di seguito, esposti tali coefficienti per alcuni casi fra i più comuni nel corso delle prove di collaudo.

Un aspetto merita di essere segnalato. Tutti i coefficienti di seguito riportati, rigorosamente esatti, in alcuni casi possono essere affetti da instabilità numerica per errori di arrotondamento decimale, inevitabili in generale nell'ambito dei calcoli numerici, ed ancor più nel caso di calcoli svolti con procedura manuale. I casi in cui tale fenomeno si riscontra è quello di strutture molto rigide che esibiscono spostamenti molto piccoli. Per ovviare a questo problema è sufficiente, come sarà espresso in una successiva nota, moltiplicare per il medesimo fattore numeratore e denominatore delle frazioni che rappresentano i coefficienti a_j nelle formule successive. Teoricamente la frazione non cambia, ma dal punto di vista numerico si migliora la stabilità poiché si trattano numeri in aritmetica finita con un maggior numero di cifre significative.

Brevemente : se si ha 0.0666 e più opportuno trattarlo come $\frac{2}{30}$

C. CASI CON CARICHI CONCENTRATI

In taluni collaudi per determinare il carico di collaudo è conveniente fare uso di carichi concentrati, quali martinetti idraulici opportunamente contrastati o autocarri i cui assali anteriori e posteriori realizzano sollecitazioni assimilabili a carichi concentrati sulla sottostante struttura da collaudare.

Le combinazioni di posizionamento dei carichi possono essere molteplici: sia per il numero degli stessi, sia in funzione della loro disposizione.

Come presentato in precedenza, attraverso la lettura delle frecce f_a , f_m ed f_b , ai quarti della luce, ottenute dalla prova di carico è possibile calcolare i coefficienti a_1 ed a_2 idonei a consentire il calcolo dei momenti reali di continuità alle estremità della campata sottocarico di prova, valori indipendenti dalle ipotesi teoriche di progetto.

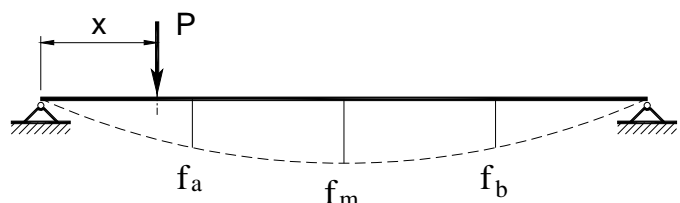
C.1 Carico concentrato singolo

Di seguito si espone il processo per un carico singolo.

Sulla trave semplicemente appoggiata gli spostamenti ai quarti sono:

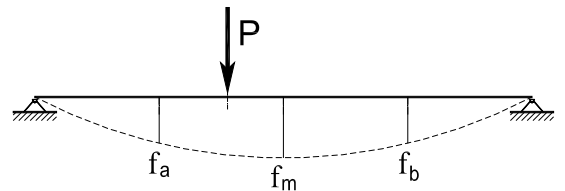
$$\begin{cases} f_{a0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} A \\ f_{m0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} B \\ f_{b0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} C \end{cases} \quad (9)$$

Ponendo $\xi = \frac{x}{\ell}$ si ha:



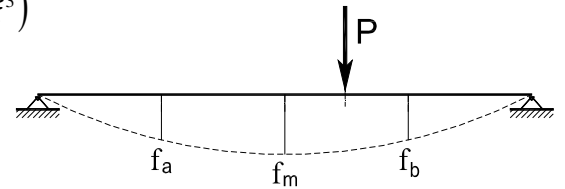
- per il carico nel 1° quarto (1° caso)

$$A = (21\xi - 48\xi^3) \quad B = (24\xi - 32\xi^3) \quad C = (15\xi - 16\xi^3)$$



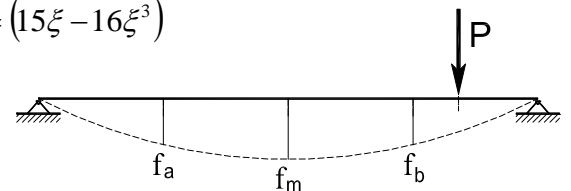
- per il carico nel 2° quarto (2° caso)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (24\xi - 32\xi^3) \quad C = (15\xi - 16\xi^3)$$



- per il carico nel 3° quarto (3° caso)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \quad C = (15\xi - 16\xi^3)$$



- per il carico nel 4° quarto (4° caso)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \quad C = (48\xi^3 - 144\xi^2 + 123\xi - 27)$$

Ponendo $H = \frac{384EJ}{P\ell^3}$ (10)

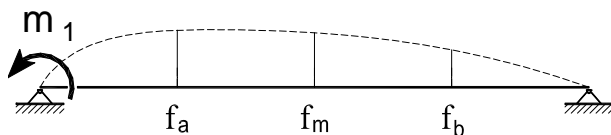
le (9) divengono $\begin{cases} Hf_{a0} = A \\ Hf_{m0} = B \\ Hf_{b0} = C \end{cases}$

Gli spostamenti generati dalle coppie d'incastro sono

$$f_{a1} = \frac{21}{384EJ} m_1 \ell^2$$

$$f_{m1} = \frac{1}{16EJ} m_1 \ell^2$$

$$f_{b1} = \frac{15}{384} m_1 \ell^2$$



e reciprocamente per m_2 .

$$f_{a2} = \frac{15}{384EJ} m_2 \ell^2$$

$$f_{m2} = \frac{1}{16EJ} m_2 \ell^2$$

$$f_{b2} = \frac{21}{384EJ} m_2 \ell^2$$

Così gli spostamenti totali dovuti al carico ed alle coppie di bordo risultano

$$\begin{cases} f_a = \frac{P\ell^3}{24EJ}A - \frac{21}{384EJ}m_1\ell^2 - \frac{15}{384EJ}m_2\ell^2 \\ f_m = \frac{P\ell^3}{24EJ}B - \frac{1}{16EJ}m_1\ell^2 - \frac{1}{16EJ}m_2\ell^2 \\ f_b = \frac{P\ell^3}{24EJ}C - \frac{15}{384EJ}m_1\ell^2 - \frac{21}{384EJ}m_2\ell^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Sostituendo } m_1 = a_1P\ell \text{ ed } m_2 = a_2P\ell \quad (12)$$

Sostituendo i valori della (12) e della (10) la (11) diviene

$$\begin{cases} Hf_a = 16A - 21a_1 - 15a_2 \\ Hf_m = 16B - 24a_1 - 24a_2 \\ Hf_b = 16C - 15a_1 - 21a_2 \end{cases} \quad (13)$$

Impostando il sistema $\frac{f_a}{f_m}$ ed $\frac{f_b}{f_m}$ e poichè i valori di f_a, f_m, f_b sono le letture della prova di carico e sono quindi noti.

Calcolando i valori A, B e C che dipendono dalle coordinate x e z della posizione del carico si determinano le due incognite a_1 ed a_2 che permettono di valutare i momenti di incastro con le (12).

Risolviendo il sistema si ha

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(7A - 5C)f_m + (8C - 7B)f_a + (5B - 8A)f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)} \\ a_2 = \frac{(7C - 5A)f_m + (5B - 8C)f_a + (8A - 7B)f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)} \end{cases} \quad (14)$$

I valori dei momenti alle estremità valgono $m_1 = a_1P\ell$ $m_2 = a_2P\ell$

Il momento flettente in mezzeria per i quattro casi vale:

- per il 1° e 2° caso $M_m = \frac{P\ell}{2}(\xi - a_1 - a_2)$
- per il 3° e 4° caso $M_m = (1 - \xi - a_1 - a_2)\frac{P\ell}{2}$

La freccia teorica in mezzeria vale:

$$\text{- per il 1° e 2° caso} \quad (15) \quad f_t = \frac{P\ell^3}{48EJ}[\xi(3 - 4\xi^2) - 3(a_1 + a_2)] \text{ oppure } f_t = \frac{\ell^2}{384EJ}[P\ell B - 24(m_1 + m_2)] \quad 16)$$

- per il caso 3° e 4°

$$f_t = \frac{P\ell^3}{48EJ}[(4\xi^3 - 12\xi^2 + 9\xi - 1) - 3(a_1 + a_2)] \text{ oppure } f_t = \frac{\ell^2}{384EJ}[P\ell B - 24(m_1 + m_2)]$$

con $B = (24\xi - 32\xi^3)$ nel 1° e 2° caso con $B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8)$ nel 3° e 4° caso.

La freccia teorica così calcolata è confrontabile con la freccia effettiva f_m misurata con la prova.

Uguagliando la (15) o la (16) con la freccia dovuta ad un carico distribuito q .

$$f_t = \frac{\ell^2}{384EJ}[5q\ell^2 - 24(m_1 + m_2)] \quad (16^1)$$

si calcola con accettabile approssimazione il carico q distribuito su tutto il solaio equivalente al carico concentrato di prova

$$\text{- per il 1° e 2° caso } q = \frac{PB}{5\ell} = \frac{P}{5\ell}(24\xi - 32\xi^3)$$

- per il 3° e 4° caso $q = \frac{PB}{5\ell} = \frac{P}{5\ell} \left((32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \right)$

Per il caso più significativo di carico al centro si ha (fig. 4)

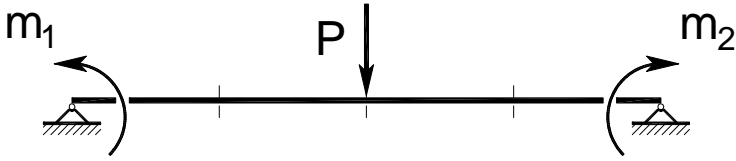


Fig. 4

$$x = \frac{\ell}{2} \quad \xi = 0.5$$

Si considera il carico nel 2° quarto.

$$B = (24\xi - 32\xi^3) = 8 \quad C = (15\xi - 16\xi^3) = 5.5 \quad A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) = 5.5$$

da cui dalle (14)

$$7A - 5C = 11; \quad (8C - 7B) = -12; \quad (5B - 8A) = -4$$

$$7C - 5A = 11; \quad (5B - 8C) = -4; \quad (8A - 7B) = -12$$

$$a_1 = \frac{11f_m - 12f_a - 4f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)}$$

$$a_2 = \frac{11f_m - 4f_a - 12f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)}$$

$$\text{Il momento flettente in mezzeria risulta } M_m = \frac{1}{4} P\ell(1 - 2a_1 - 2a_2)$$

$$\text{La freccia in mezzeria risulta } f_m = \frac{P\ell^3}{48EJ} [1 - 3a_1 - 3a_2]$$

Se i rapporti di $\frac{f_a}{f_m} = \frac{f_b}{f_m} = 0.5$ si ha $a_1 = a_2 = 0.125$ ossia l'incastro perfetto.

Se i rapporti di $\frac{f_a}{f_m} = \frac{f_b}{f_m} = 0.6875$ si ha $a_1 = a_2 = 0$ ossia l'appoggio semplice.

C.2 Carico con più forze agenti concentrate

Se più forze agiscono sulla trave, utilizzando il metodo precedente si constata come sostanzialmente il procedimento non cambia.

Così lo spostamento f_a è dato dalla somma degli spostamenti dovuti dalle singole forze. Nel caso per esempio di 4 forze

$$f_a = f_a^1 + f_a^2 + f_a^3 + f_a^4$$

$$\begin{cases} f_a^1 = \frac{P_1\ell^3}{384EJ} A_1 - \frac{21}{384} P_1 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_1 a_2 \ell^3 \\ f_a^2 = \frac{P_2\ell^3}{384EJ} A_2 - \frac{21}{384} P_2 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_2 a_2 \ell^3 \\ f_a^3 = \frac{P_3\ell^3}{384EJ} A_3 - \frac{21}{384} P_3 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_3 a_2 \ell^3 \\ f_a^4 = \frac{P_4\ell^3}{384EJ} A_4 - \frac{21}{384} P_4 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_4 a_2 \ell^3 \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{Sostituendo: } P_2 = R_2 P_1 \quad P_3 = R_3 P_1 \quad P_4 = R_4 P_1$$

ed $H = \frac{384EJ}{P_1 \ell^3}$ la somma della (17) dà la f_a totale delle quattro forze $H f_a = A - 21Ra_1 - 15Ra_2$

$$A = A_1 + R_2 A_2 + R_3 A_3 + R_4 A_4$$

dove
$$R = 1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{P_1}$$

Analogamente per f_m ed f_b . Così si ha

$$\begin{cases} Hf_a = A - 21Ra_1 - 15Ra_2 \\ Hf_m = B - 24Ra_1 - 24Ra_2 \\ Hf_b = C - 15Ra_1 - 21Ra_2 \end{cases} \quad (18)$$

A_1 è il parametro dell'abbassamento f_a dovuto alla forza P_1

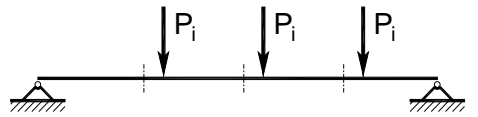
A_2 è il parametro dell'abbassamento f_a dovuto alla forza P_2

A_3 eccetera

In particolare se la forza generica P_i è nel 1° quarto $A_i = (21\xi_i - 48\xi_i^3)$

Se la forza generica è negli altri quarti della trave $A_i = (16\xi_i^3 - 48\xi_i^2 + 33\xi_i - 1)$

.....



$$B = B_1 + B_2 R_2 + B_3 R_3 + B_4 R_4 + \dots B_m R_m \text{ dove}$$

B_1 è il parametro dell'abbassamento f_m in mezzeria dovuto alla P_1

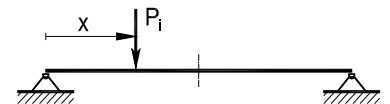
B_2 è il parametro dell'abbassamento f_m in mezzeria dovuto alla P_2

B_3 ecc.

In particolare:

- se la forza generica P_i è nella prima metà della trave si ha $B_i = (24\xi_i - 32\xi_i^3)$

- se la forza generica P_i è nella 2° metà della trave si ha $B_i = (32\xi_i^3 - 96\xi_i^2 + 72\xi_i - 8)$



$$C = C_1 + C_2 R_2 + C_3 R_3 + C_4 R_4 + \dots C_n R_n \text{ dove}$$

C_1 è il parametro dell'abbassamento f_b dovuto alla P_1

C_2 è il parametro dell'abbassamento f_b dovuto alla P_2

C_3 è il parametro dell'abbassamento f_b dovuto alla P_3

C_4 ecc.

In particolare:

- se la forza generica P_i è posizionata nei primi 3 quarti della trave si ha $C_i = (15\xi_i - 16\xi_i^3)$

- se la forza generica P_i è nell'ultimo quarto si ha $C_i = (48\xi_i^3 - 144\xi_i^2 + 123\xi_i - 27)$

.....

- la (18) è sostanzialmente simile alla (13) la cui soluzione è quindi simile alla (14)

Calcolati A, B, C , ed R , con le letture degli abbassamenti di prova f_a, f_m, f_b , si calcolano a_1 ed a_2 . Essi valgono

$$\begin{cases} Ma_1 = (7A - 5C)f_m + (8C - 7B)f_a + (5B - 8A)f_b \\ Ma_2 = (7C - 5A)f_m + (5B - 8C)f_a + (8A - 7B)f_b \end{cases} \quad (19)$$

$$M = R(1.5f_m - f_a - f_b) \times 48$$

$$\text{I momenti reali agli estremi sono } m_1 = a_1 P_1 \ell R \quad m_2 = a_2 P_1 \ell R \quad (20)$$

$$\text{La freccia teorica in mezzeria vale } f_r = \frac{P_1 \ell^3}{384 E J} [B - 24R(a_1 + a_2)] \quad (20^1)$$

Esempio n. 1

L'esempio seguente riporta una prova di collaudo di un solettone intermedio di un'importante struttura multipiano interrata (foto 3).



Foto 3: Complesso strutturale con solettone superiore

La prova è stata effettuata dalla "4EMME Service S.p.A." sotto la direzione dell'arch. Alberto Capussotto il 21 ottobre 2009 a Torino.

Le letture riportate nei calcoli sono certificate dalla 4EMME.

Il carico è stato effettuato mediante due celle di carico idraulico con contrasto al solettone superiore (vedi foto 4).



Foto 4: Pistoni idraulici di carico del solettone intermedio contrastati dal solettone superiore

Il solaio è realizzato mediante elementi alveolari tipo *SPYROLL* con luce di calcolo $\ell = 10.5m$, la rigidezza complessiva di una striscia larga 1 m è pari a $EJ = 5.4 * 10^{11} daN \cdot cm^2$ come risulta dai dati di progetto. Più propriamente sarebbe necessario controllare specie il valore della E dell'elemento in opera così come il J realmente realizzato poiché talvolta differiscono da quelli di progetto ed i valori di collaudo si riferiscono a quanto realizzato e non ipotizzato di progetto.

La posizione dei carichi ed i punti di lettura sono rappresentati nella figura 5.

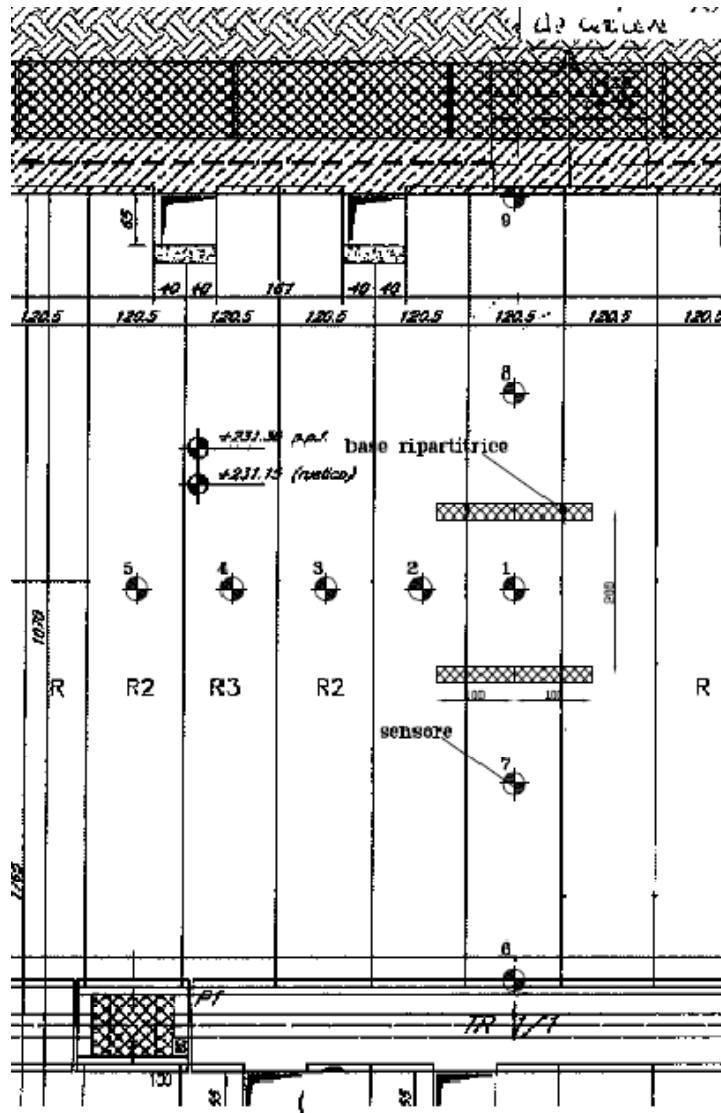


Figura 5: posizione carichi e strumenti di lettura

Le letture dei comparatori n. 1-2-3-4 e 5 della fig.6 permettono di calcolare la ripartizione trasversale.

Nel caso considerato, il coefficiente K_1 risulta pari a $K_1 = 0.3178$. con il seguente calcolo

$$A/2 = \left[12/2 + (12 + 22)/2 + (22 + 34)/2 + (34 + 49)/2 + (49 + 58)/2 \right] \times 1.25 = 182.5m \times mm \times 10^{-2}$$

$$A = 365m \times mm \times 10^{-2} \quad K_1 = \frac{b \times f m}{A} = \frac{2 \times 58}{365} = 0.3178$$

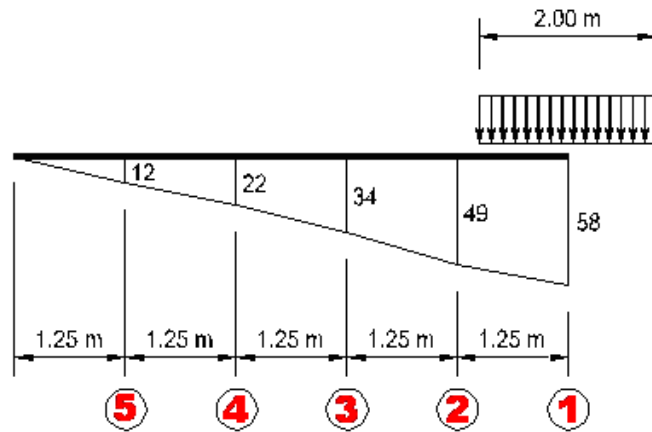


Figura 6: calcolo ripartizione trasversale

Il carico attribuito a ciascuno dei martinetti è pari a $F=5227 \text{ daN}$. Mediante l'applicazione di tale coefficiente, le forze applicate alla striscia di solaio larga 1 m si riducono a $P_1 = P_2 = 1661 \text{ daN}$.

La figura 7 riporta i valori delle letture ai comparatori 6-7-1-8 e 9, mentre in rosso sono indicate le letture di f_a , f_m ed f_b , depurate dal cedimento dei vincoli. Esse sono espresse in centesimi di millimetro, nei termini in appresso:

$$f_a=31.75, \quad f_m=48.50, \quad f_b=26.25$$

Calcolo dei momenti di incastro effettivi

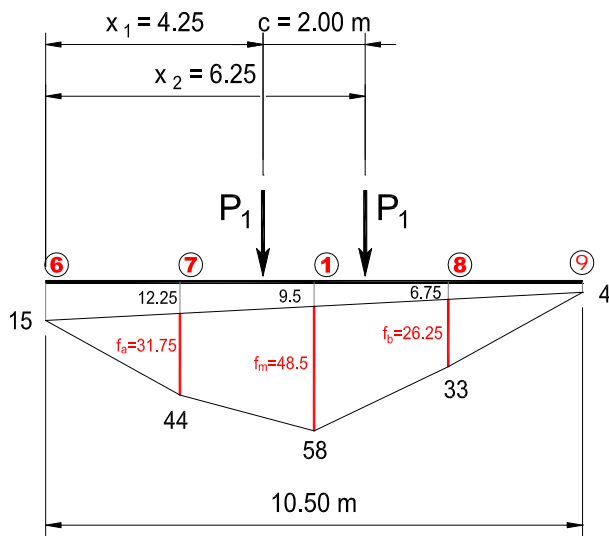


Fig. 7

p	daN	x	ξ
P_1	1661	4.25	0.4048
P_2	1661	6.25	0.5952
P_{TOT}	3322		

$$R_2 = \frac{P_2}{P_1} = 1$$

$$R = \frac{P_1 + P_2}{P_1} = 2$$

$$A_1 = (16\xi_1^3 - 48\xi_1^2 + 33\xi_1 - 1) = 5.5543 \quad A_2 = (16\xi_2^3 - 48\xi_2^2 + 33\xi_2 - 1) = 5.0107$$

$$B_1 = (24\xi_1 - 32\xi_1^3) = 7.5926 \quad B_2 = (32\xi_2^3 - 96\xi_2^2 + 72\xi_2 - 8) = 7.5926$$

$$C_1 = (15\xi_1 - 16\xi_1^3) = 5.0107 \quad C_2 = (\xi_2 - 16\xi_2^2) = 5.5543$$

$$A = A_1 + R_2 A_2 = 10.5650$$

$$B = B_1 + R_2 B_2 = 15.1852$$

$$C = C_1 + R_2 C_2 = 10.5650$$

I valori di a_1 ed a_2 sono dati dalla (19)

$$\begin{cases} Ma_1 = (7A - 5C)fm + (8C - 7B)fa + (5B - 8A)fb \\ Ma_2 = (7C - 5A)fm + (5B - 8C)fa + (8A - 7B)fb \end{cases} \quad (19)$$

$$M = 48 \cdot 2(1.5 \cdot 48.50 - 31.75 - 26.25) = 1416$$

$$\begin{cases} 1416 \times a_1 = 21.121 \times 48.50 - 21.77626 \times 31.75 - 8.5940 \times 26.25 \\ 1416 \times a_2 = 21.121 \times 48.50 - 8.5940 \times 31.75 - 21.77626 \times 26.25 \end{cases}$$

$$a_1 = 0.0761 \quad a_2 = 0.1273$$

I momenti reali d'incastro sono dati dalla (20) e valgono:

$$\begin{cases} m_1 = a_1 P_1 R \ell = 2654.44 daN \cdot m / m \\ m_2 = a_2 P_1 R \ell = 4440.35 daN \cdot m / m \end{cases} \quad (20)$$

Il momento in mezzzeria vale

$$\begin{aligned} M_m &= P_1 \frac{\ell}{2} [-(\xi_1 - R_2 \xi_2 + R_2) R (a_1 + a_2)] = 1661 \cdot \frac{10.5}{2} [0.4048 + 0.4048 - 2(0.2034)] = \\ &= 3512 daN \cdot m \end{aligned}$$

Con tale valore si può calcolare il carico equivalente uniformemente distribuito su tutto il solaio uguagliando i momenti.

$$M_m = \frac{1}{8} q \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = 3512 = \frac{1}{8} q 10.5^2 - \frac{1}{2} (2654 + 4440) da \text{ cui } q = 512 daN \times m$$

La freccia teorica in mezzzeria vale dalla (20¹):

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{P_1 \ell^3}{384 E J} [B - 24 R (a_1 + a_2)] \\ f_1 &= \frac{1.661 \cdot 1050^3}{384 \cdot 5.4 \cdot 10^{12}} \cdot 5.4224 = 0.0503 cm \end{aligned}$$

Uguagliano le frecce si ottiene

$$\frac{P_1 \ell^3}{384 E J} \cdot 5.4224 = \frac{\ell^2}{384 E J} [5 q_1 \ell^2 - 24 (m_1 + m_2)]$$

con $m_1 = 265400 daN \cdot cm$, $m_2 = 444000 daN \cdot cm$, $P = 1661 daN$, $\ell = 1050 cm$

si ottiene $q_1 = 480 daPa$

molto simile al precedente calcolato uguagliando i momenti e tali valori sono assai prossimi ai $600 kg / m^2$ previsti nel progetto.

Il valore della freccia teorica $f_1 = 0.0503 cm$ calcolata con i parametri geometrici di calcolo (luce ℓ rigidezza EJ) e con i dati effettivi di carico con distribuzione trasversale e di reale incastro ai bordi, è confrontabile con quella effettiva, f_m .

determinata in misura pari a 0.0485cm.

D. CARICO GENERICO DISTRIBUITO

Al capitolo 2, per i casi di carichi concentrati di collaudo su solai, sono stati calcolati i valori di a_1 e a_2 con esempi applicativi.

Tuttavia si ritiene necessario ed utile sviluppare il calcolo di tali coefficienti per carichi distribuiti qualsiasi sia nel loro numero sia nella loro posizione e valore anche variabile nel proprio intervallo di impronta.

Con riferimento all' "Inquadramento generale del metodo" (Capitolo B) il problema del carico generico anche variabile distribuito parzialmente ed in zona qualsiasi sulla trave è risolvibile in via definitiva ed esatta sul modo seguente.

Con riferimento al paragrafo C (Carichi Concentrati) i coefficienti A-B-C sono più propriamente definibili quali funzioni di influenza dello spostamento dei punti di controllo (i quarti della luce) per i carichi agenti nelle varie posizioni, posizioni individuate dalle variabili ξ e ζ di cui $\zeta = 1 - \xi$.

Per qualsiasi condizione di carico, generico, il loro impiego diviene immediato con risultati esatti.

Così per la freccia f_a per la prima delle (9) per carico concentrato P su trave semplicemente appoggiata, risulta

$$f_{a0} = A(\xi) \frac{P}{K}$$

$$\text{con } K = \frac{384EJ}{\ell^3} \quad (21^\circ)$$

Considerando un carico generico $p = p(\xi)$ anche variabile, da ξ_1 a ξ_2 si ha $dP = p(\xi)d\xi$ da cui

$$df_{a0} = A(\xi) dP / K = (1/K) A(\xi) p(\xi) d\xi .$$

$$\text{La freccia si ottiene per integrazione sullo sviluppo della trave } f_{a0} = \frac{l}{K} \int_{\xi_1}^{\xi_2} A(\xi) p(\xi) d\xi . \quad (21)$$

Come già noto il coefficiente $A(\xi)$ assume due forme a seconda del tratto di integrazione:

a. prima del punto di controllo ("a" in questo caso al 1° quarto della trave) si ha

$$(22) \quad A_1(\xi) = (21\xi - 48\xi^3) \quad \text{---} \quad \text{"a"} \quad \text{---}$$

b. dopo il punto di controllo ossia per gli altri $\frac{3}{4}$ di trave si ha

$$(23) \quad A_2(\xi) = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1)$$

L'integrale (21) diviene

$$f_{a0} = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} A_1(\xi) p(\xi) d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} A_2(\xi) p(\xi) d\xi \right] \times \frac{\ell^4}{384EJ} = \alpha \frac{\ell^4 p}{384EJ} \quad (23^1)$$

dove ξ_1 e ξ_2 sono i limiti per il carico nel primo quarto e ξ_3 e ξ_4 sono i limiti per i carichi nei tre quarti successivi al punto "a". α è quindi un numero.

Con tale integrazione si possono dedurre tutte le formule relative ai carichi concentrati, distribuiti anche variabili sia d'intensità che di posizione.

Analogamente si ottiene per f_{m0} ed f_{b0}

$$f_{m0} = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} B_1(\xi) p(\xi) d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} B_2(\xi) p(\xi) d\xi \right] \frac{\ell^4}{384EJ} = \beta \times \frac{\ell^4 \times p}{384EJ} \quad (24^1)$$

$$B_1(\xi) = (24\xi - 32\xi^3) \quad (24)$$

$$B_2(\xi) = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \quad (25)$$

$B_1(\xi)$ per la forza posizionata nella prima metà della trave e $B_2(\xi)$ posizionata nella seconda metà della trave.

$$f_{b0} = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} C_1(\xi) p(\xi) d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} C_2(\xi) p(\xi) d\xi \right] \times \frac{\ell^4}{384EJ} = \gamma \times \frac{\ell^4 \times p}{384EJ} \quad (25^1)$$

$$C_1(\xi) = (15\xi - 16\xi^3) \quad (26)$$

$$C_2 = (48\xi^3 - 144\xi^2 + 123\xi - 27) \quad (27)$$

$C_1(\xi)$ vale per la forza posizionata nei primi 3/4 della trave

$C_2(\xi)$ vale per la forza posizionate nell'ultimo quarto della trave.

Così gli spostamenti totali dovuti ai carichi ed alle coppie di bordo risulta

$$f_a = \alpha \frac{\ell^4 p}{384EJ} - \frac{21\ell^4}{384EJ} a_1 p \ell^4 - \frac{15p}{384EJ} a_2 \ell^4$$

$$f_m = \beta \frac{p\ell^4}{384EJ} - \frac{24}{384} p a_1 \ell^4 - \frac{24}{384} p a_2 \ell^4$$

$$f_b = \gamma \frac{p\ell^4}{384EJ} - \frac{15}{384EJ} p \ell^4 a_1 - \frac{21}{384EJ} p \ell^4 a_2$$

ponendo $H_1 = \frac{384EJ}{p\ell^4} \quad (27^1)$

$$\left. \begin{aligned} f_a H_1 &= \alpha - 21a_1 - 15a_2 \\ f_m H_1 &= \beta - 24a_1 - 24a_2 \\ f_b H_1 &= \gamma - 15a_1 - 21a_2 \end{aligned} \right\} (28)$$

La (28) è simile alla (13) dove α, β, γ sostituiscono A,B,C. Quindi per carichi distribuiti si ha

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{(7\alpha - 5\gamma)fm + (8\gamma - 7\beta)fa + (5\beta - 8\alpha)fb}{48(1.5 \times fm - fa - fb)} \\ a_2 &= \frac{(7\gamma - 5\alpha)fm + (5\beta - 8\gamma)fa + (8\alpha - 7\beta)fb}{48(1.5 fm - fa - fb)} \end{aligned} \right\} (29)$$

I valori dei momenti agli appoggi valgono

$$m_1 = a_1 q \ell^2 \quad m_2 = a_2 q \ell^2 \quad (30)$$

Il momento in mezzeria vale

$$M_m = M_{mezzeriaisostatica} - 0.5q\ell^2(a_1 + a_2) \quad (31)$$

La freccia in mezzeria vale

$$f_i = \frac{p\ell^4}{384EJ} [\beta - 24(a_1 + a_2)] \quad (32)$$

Tale freccia teorica è da confrontare con quelle di prova fm .

Esempio 2

Carico q costante su tutta la trave

La (21) diviene

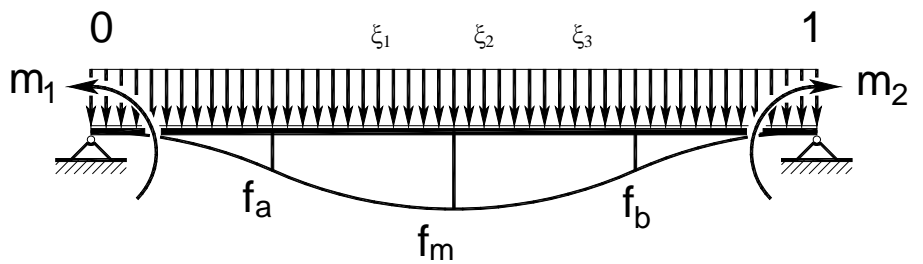
$$\frac{K}{\ell} fa_0 = \int_0^{\xi_1} q A_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_1}^1 q A_2(\xi) d\xi$$

1° quarto 2°-3°-4° quarto

$$q \int_0^{0.25} (21\xi - 48\xi^3) d\xi + q \int_{0.25}^1 (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) d\xi$$

$$\frac{K}{q\ell} fa_0 = [10.5\xi^2 - 12\xi^4]_0^{0.25} + [4\xi^4 - 16\xi^3 + 16.5\xi^2 - \xi]_{0.25}^1 = 0.609375 + 2.953125 = 3.5625 = \frac{57}{16}$$

$$fa_0 = \frac{57}{16} \frac{q\ell^4}{384EJ} \quad \alpha = \frac{57}{16}$$



$$\frac{K}{q\ell} fm_0 = \int_0^{0.5} B_1(\xi) d\xi + \int_{0.5}^1 B_2(\xi) d\xi \quad \text{sostituendo ed integrando come in precedenza si ha:}$$

$$fm_0 = \frac{5q\ell^4}{384EJ} \quad \text{ossia } \beta = 5$$

$$\frac{K}{q\ell} fb_0 = \int_0^{0.75} C_1(\xi) d\xi + \int_{0.75}^1 C_2(\xi) d\xi$$

$$\text{Sostituendo ed integrando si ha } fb_0 = \frac{57}{16} \frac{q\ell^4}{EJ384} \quad \gamma = \frac{57}{16} = \alpha$$

Sostituendo i valori α, β, γ , nella (29) tenendo conto del denominatore si ha

$$a_1 = \frac{57 fm - 52 fa - 28 fb}{384(1.5 fm - fa - fb)} \quad a_2 = \frac{57 fm - 28 fa - 52 fb}{384(1.5 fm - fa - fb)} \quad (33)$$

I momenti agli appoggi valgono $m_1 = a_1 q\ell^2$ $m_2 = a_2 q\ell^2$

La freccia teorica in mezzeria vale dalla (32) con $\beta = 5$

$$f_t = \frac{q\ell^4}{384EJ} [5 - 24(a_1 + a_2)] \text{ oppure } f_t = \frac{\ell^2}{384EJ} [5q_1\ell^2 - 24(m_1 + m_2)] \quad (32')$$

Il momento in mezzeria vale

$$M_m = \frac{1}{2} q\ell^2 (0.25 - a_1 - a_2)$$

Esempio n.3

Si riporta la prova di un collaudo, nel quale è richiesta un'omologazione per un carico uniformemente distribuito pari a 35KPa.

L'attrezzatura e la prova è stata condotta dalla 4EMME Service S.p.A.

Si è provveduto a caricare una striscia di larghezza b e lunghezza a .

Il solaio è a 3 campate in continuità libero sottostante. È realizzato in soletta mista a blocchi di laterizio e travetti in c.a. indicato in fig. 8

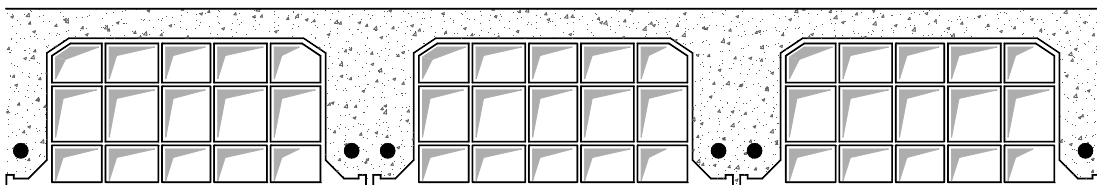


Figura 8: sezione tipologica del solaio

Le prove eseguite *in loco* con opportuna strumentazione hanno determinato un modulo elastico del cls. $E=290.000 \text{ MPa}$.

Il momento d'inerzia, secondo la tabella impiegata dai costruttori per tale solaio, risulta $J=56.031 \text{ cm}^4$.

Quindi $EJ=1,62 \cdot 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ per una striscia larga 1 m.

La prova viene effettuata sulla campata centrale di luce netta pari a 6 m e luce di calcolo pari a $\ell = 6.3 \text{ m}$

Il carico a disposizione è costituito da un serbatoio flessibile per carico idraulico di dimensioni $b=3 \text{ m}$ ed $a= 6 \text{ m}$ circa a pieno carico. Esso viene posizionato come in fig. 9. Il carico si considera, quindi, come distribuito sull'intera luce teorica.

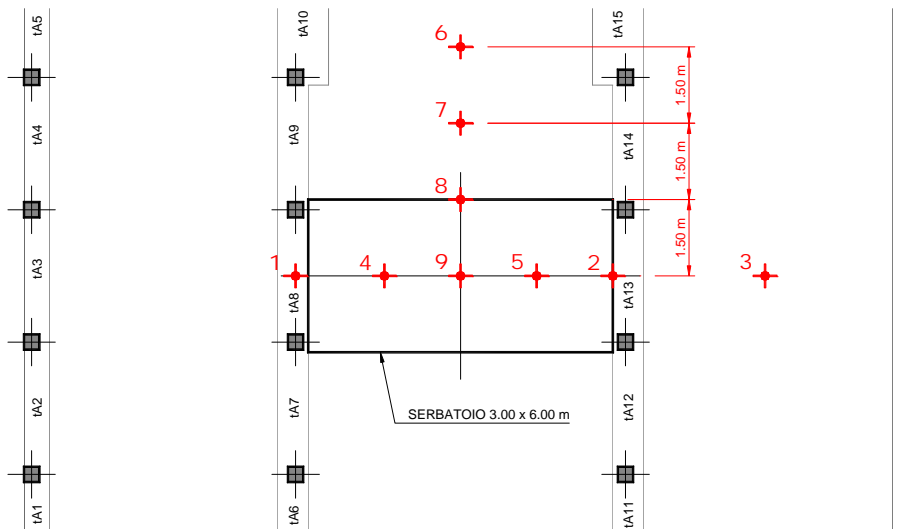


Figura 9: posizionamento dei flessimetri

Vengono posizionati n. 9 flessimetri centesimali come indicato in fig. 9

Determinazione della ripartizione trasversale

Riempendo prudentemente il serbatoio fino a 30 cm di altezza si ha un carico di 300 kg/m² su una larghezza di 3 m e una lunghezza di 6 m. Misurando le frecce si ottengono i valori in mm riportati nella prima fila della tabella 1

Carico	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
300 Kg/m ²	0.04	0.06	0	0.82	0.85	-0.06	0.27	0.80	1.25
430 Kg/m ²	0.06	0.08	0	1.14	1.19	-0.07	0.39	1.28	1.75
430 Kg/m ² Depurate(*)	0	0		1.07	1.12				1.68
Scarico dopo 12 ore	0.01	0.02	0	0.08	0.06	-0.05	-0.10	0.08	0.10

Tabella 1: letture ai flessimetri -al netto degli appoggi della trave (mm)

I sensori trasversali, depurando le letture del flessimetro n. 9 dal cedimento degli appoggi sono: (fig.10)

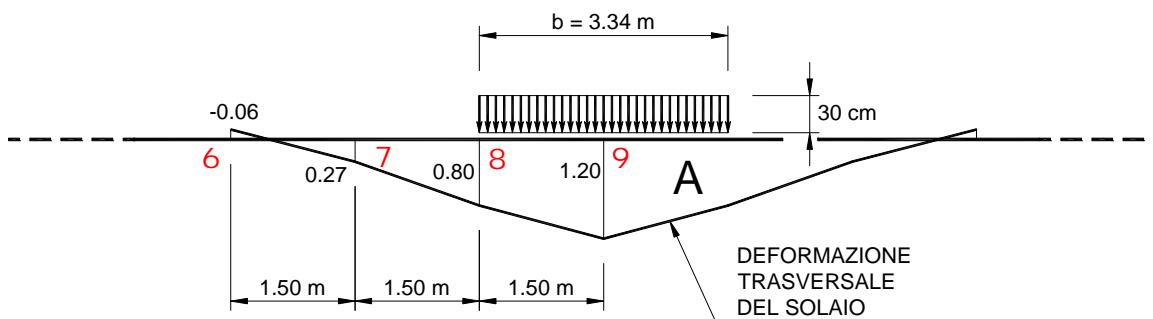


Figura 10: letture ai flessimetri depurate dal n.9

Stante il riempimento parziale il serbatoio assume un'impronta pari a $b=3.34$ cm.

$$q = \frac{f_m b}{A} p$$

$$A = 1.5[-0.06 + 2*0.27 + 2*0.8 + 1,2] = 4.92 \text{ m}^2$$

$$q = \frac{1.20 * 3.34}{4.92} p = 0.8146 p$$

Se si intende, quindi, omologare (o meno) il solaio per un carico $p_1 = 350 \text{ kg/m}^2$ è necessario caricare la striscia considerata larga 1 m con un carico idraulico $q_1 = \frac{p_1}{0.8146} = \frac{350}{0.8146} = 430 \text{ kg/m}$ ossia 43 cm di altezza di carico idraulico nel serbatoio.

Pertanto, il carico di prova $p = 430 * 3.2 = 1370 \text{ kg/m}$ sull'impronta di carico, che ha assunto la larghezza di 3.20 m, per l'intera (approssimata) lunghezza del solaio risulta di $q_1 = 430 \text{ kg/m}$ su striscia larga 1 m; tenendo conto della ripartizione trasversale, l'intero solaio risulta, quindi, essere caricato con una $p_1 = 350 \text{ kg/m}^2$.

Per il carico idraulico corrispondente ad un riempimento di 43 cm del serbatoio le letture sono riportate nella seconda linea di Tabella 16.

Calcolo dei momenti flettenti

La campata centrale risente degli effetti delle campate laterali i cui effetti sono schematizzabili con due coppie poste agli appoggi.

Le letture ai quarti ed in mezzeria della luce depurate dagli abbassamenti degli appoggi per il carico di 430 Kg/m^2 sulla striscia larga 3.20 m (come detto equivalente a $p_1 = 350 \text{ Kg/m}^2$) sono riportati nella terza linea della tabella 1.

Sicché, indicando:

$$m_1 = a_1 p_1 \ell^2 ; \quad m_2 = a_2 p_1 \ell^2 ; \quad f_m = f_9 ; \quad f_a = f_4 ; \quad f_b = f_5 ;$$

si ricava applicando le (33):

$$a_1 = \frac{57 f_m - 52 f_a - 28 f_b}{384(1.5 f_m - f_a - f_b)} = \frac{57 * 1.68 - 52 * 1.07 - 28 * 1.12}{384(1.5 * 1.68 - 1.07 - 1.12)} = 0.0691$$

$$a_2 = \frac{57 f_m - 52 f_b - 28 f_a}{384(1.5 f_m - f_a - f_b)} = \frac{57 * 1.68 - 52 * 1.12 - 28 * 1.07}{384(1.5 * 1.68 - 1.07 - 1.12)} = 0.0597;$$

$$m_1 = 0.0691 * 350 * 6 \cdot 3^2 = 960 \text{ kgm/m}$$

$$m_2 = 0.0597 * 350 * 6 \cdot 3^2 = 829 \text{ kgm/m}$$

In mezzeria:

$$M = \frac{1}{8} p_1 \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = \frac{1}{8} 350 * 6 \cdot 3^2 - \frac{960 + 829}{2} = 842 \text{ kgm/m}$$

Calcolo della freccia teorica. Applicando la (32) con $\beta = 5$ si ha

$$f_t = \frac{p_1 \ell^4}{384 E J} [5 - 24(a_1 + a_2)] = \frac{1.909}{384 E J} p_1 \ell^4 = \frac{1.909 * 3.5 * 6 \cdot 30^4}{384 * 1.62 * 10^{10}}$$

da cui risulta $f_t = 1.692 \text{ mm}$ praticamente simile, ma lievemente superiore a quello di prova pari a $f_m = 1.68 \text{ mm}$

A scarico avvenuto, il ritorno dei flessimetri si mostra sufficientemente positivo, denotando una corretta elasticità del solaio e consentendone l'omologazione per il carico richiesto, pari a 350 kg/m^2 .

Esempio 4

Prova di carico per il collaudo di un solaio misto a blocchi con $H = 28 \text{ cm}$, con rigidità flessionale riferita ad 1ml di larghezza del solaio $EJ = 3,2 * 10^9 \text{ Mpa}$ e con luce $\ell = 7 \text{ m}$.

$Q =$ carico su un'area centrale di larghezza $b = 1.5 \text{ m}$ e lunghezza $a = \frac{\ell}{2} = 3.5 \text{ m}$.

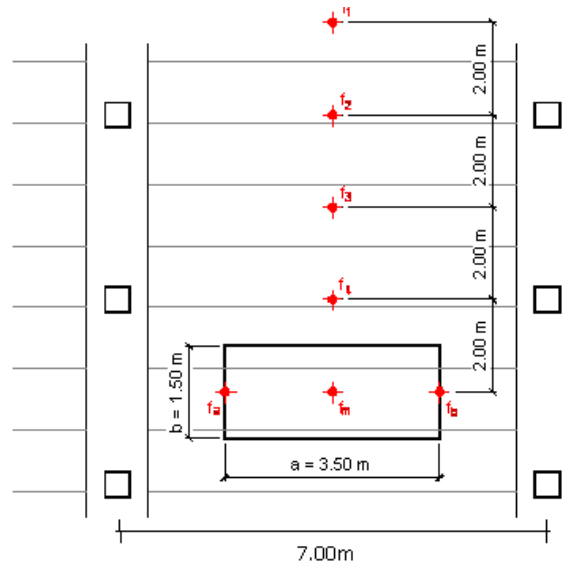


Figura 11: posizionamento trasversale dei flessimetri

Il carico di collaudo complessivo sia $Q = 5250 \text{ kg}$, pari a $p = \frac{5250}{3,5} = 1500 \text{ kg/m}$ su una striscia larga 1,5m. A carico completo le letture, in cm, ai flessimetri risultano:

f_m	f_a	f_b	f_l	f_2	f_3	f_4
0.16	0.11	0.112	0	0.01	0.04	0.09

Tabella 2 : letture strumentali (cm)

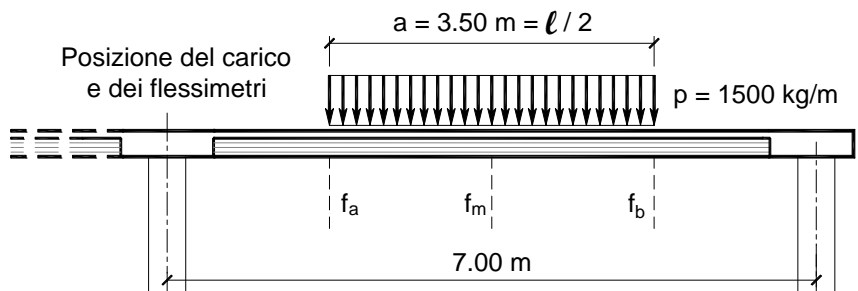


Figura 12: schema di carico longitudinale

Calcolo della ripartizione trasversale

$$\frac{A}{2} = \frac{0+0.01}{2} * 2 + \frac{0.01+0.04}{2} * 2 + \frac{0.04+0.09}{2} * 2 + \frac{0.09+0.16}{2} * 2 = 0.44mq$$

$$A = 0.88mq$$

per cui $q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = \frac{0.16 * 1.5}{0.88} p = 0.2727 p = 0.2727 * 1500 = 410 \text{ kg/m}$

Il carico $q = 410 \text{ kg/m}$ agisce su una striscia larga 1.5m.

La striscia di solaio verificabile larga 1m pertanto risulta caricata con $q_1 = \frac{410}{1.5} = 273 \text{ kg/m}$ per un tratto centrale

$$\frac{l}{2} = 3.5m.$$

Calcolo dei momenti flettenti

Si calcolano i momenti di estremità effettivi nella struttura reale m_1 ed m_2 tramite la lettura di f_a ed f_b ai quarti della luce ed f_m in mezzeria dove $m_1 = a_1 q_1 \ell^2$ ed $m_2 = a_2 q_1 \ell^2$

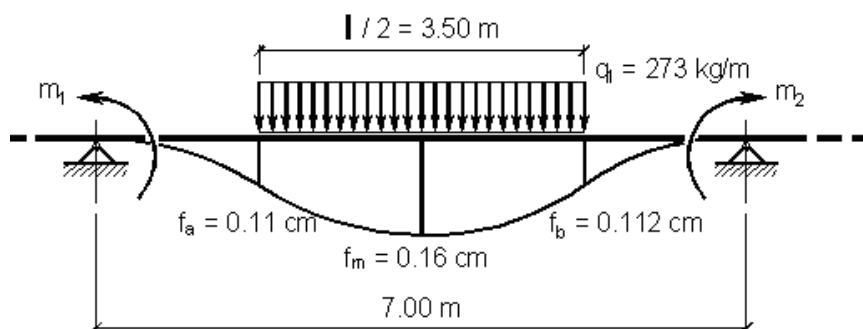


Figura 13: valori numerici di calcolo

Sviluppando il calcolo come indicato al capitolo D secondo l'esempio 1, in questo caso con carico parziale sul solaio, si ha:

$$a_1 = \frac{80f_m - 79f_a - 35f_b}{768(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{80 \cdot 0.16 - 79 \cdot 0.11 - 35 \cdot 0.112}{768(1.5 \cdot 0.16 - 0.11 - 0.112)} = \frac{0.19}{13.824} \quad a_1 = 0.0137$$

$$a_2 = \frac{80f_m - 79f_b - 35f_a}{768(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{80 \cdot 0.16 - 79 \cdot 0.112 - 35 \cdot 0.11}{768(1.5 \cdot 0.16 - 0.11 - 0.112)} = \frac{0.102}{13.824} \quad a_2 = 0.0074$$

Calcolo della freccia teorica

La freccia teorica risulta:

$$f_t = \frac{q_1 \ell^4}{384EJ} \left[\frac{57}{16} - 24(a_1 + a_2) \right] = \frac{q_1 \ell^4}{384EJ} 3.0566$$

$$f_t = \frac{2.73 \cdot 700^4}{384 \cdot 3.2 \cdot 10^{10}} \cdot 3.0566 = 0.163 \text{ cm.}$$

Conclusioni

La freccia teorica massima, pari a 0.163 cm, risulta superiore a quella massima di prova misurata, che è pari a $f_m = 0.16$ cm ma molto simile.

I momenti flettenti di prova risultano:

$$M_m = \frac{q_1 \ell^2}{2} \left[\frac{3}{16} - a_1 - a_2 \right] = \frac{q_1 \ell^2}{2} 0.1664 = 1113 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_1 = 0.0137 \cdot 273 \cdot 7^2 = 183 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_2 = 0.0074 \cdot 273 \cdot 7^2 = 100 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{m.}$$

Si calcola a quale carico p_1 a m^2 esteso a tutto il solaio corrisponde il carico q_1 del collaudo.

$$\text{La freccia teorica risulta: } f_t = \frac{\ell^2}{384EJ} \left[\frac{57}{16} q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right]$$

La freccia per il carico uniformemente distribuito su tutta la striscia larga 1 m risulta dalla (32¹):

$$f_t = \frac{\ell^2}{384EJ} \left[5p_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right] \text{ da cui uguagliando si ha: } \frac{57}{16} q_1 = 5p_1$$

$$p_1 = \frac{57}{16 \cdot 5} q_1 = 0.7125 \cdot 273 = 1.95 \text{ KPa.}$$

Esempio n.5

È, di seguito, rappresentata una prova di collaudo su solettone di copertura di galleria artificiale, effettuata mediante l'utilizzo di una serie di automezzi pesanti (foto 5) nell'ambito di un rilevante complesso di opere realizzate in Torino. La relazione di collaudo è stata redatta in data 9/7/09 e le misurazioni sono state effettuate e certificate dalla 4EMME Service S.p.A.



Foto 5: Camion carichi adibiti al collaudo

La struttura

La struttura è composta da un impalcato di travi precomprese affiancate, solidarizzate con cappa collaborante, con getto di massetto di completamento.

Il calcolo di progetto considera le travi incastrate alla struttura portante verticale di sinistra e appoggiate a quelle di destra. Indicando la flessione del solaio, la prova permetterà di calcolare il reale grado d'incastro.

All'atto della prova era già stato posto uno strato di terrapieno dello spessore di 70cm circa.

La posizione dei camion è indicata in fig.14.

A causa del riporto la ripartizione sul solaio dei carichi risulta secondo la fig.15.

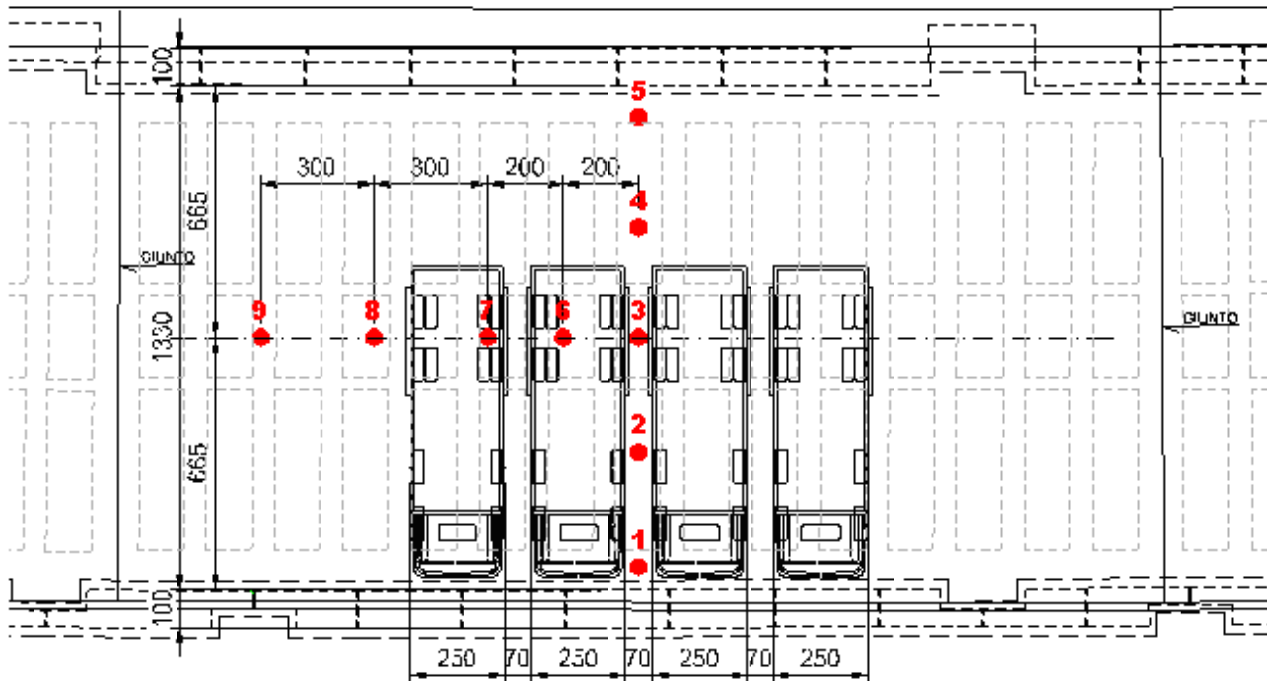


Figura 14: Posizione dei camion e dei comparatori centesimali

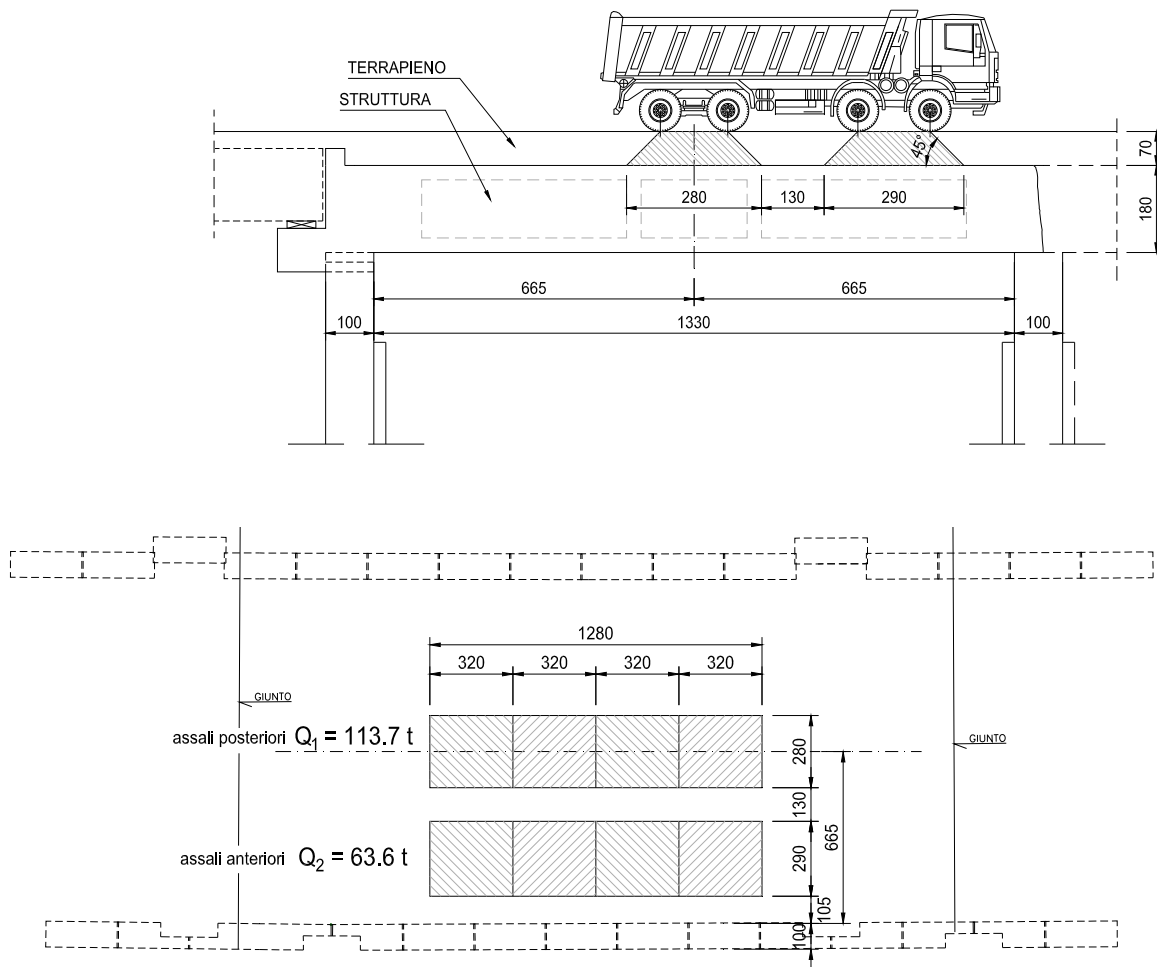


Figura 15: Incidenza dei carichi sulla soletta

La somma dei carichi risultante dalle bolle dei pesi è riportata in figura 16.

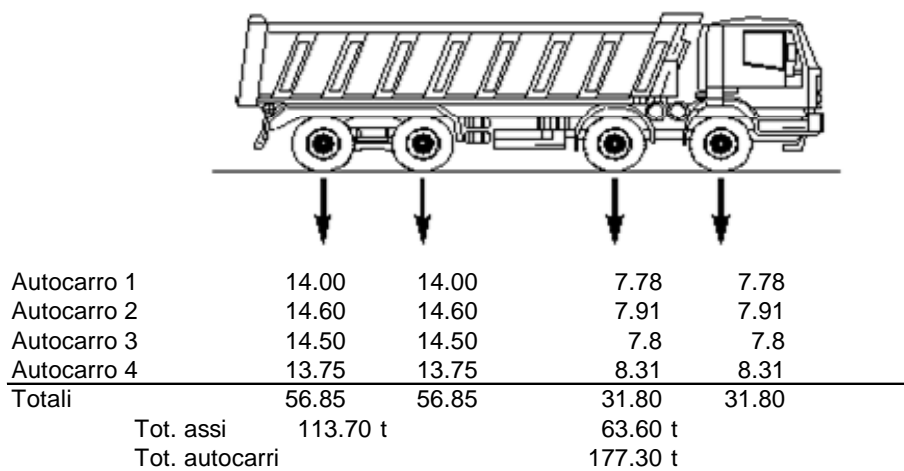


Figura 16 Analisi dei carichi di ogni camion e di ogni assale

Le letture azzerate e depurate dei cedimenti degli appoggi sono

Letture in centesimi di mm

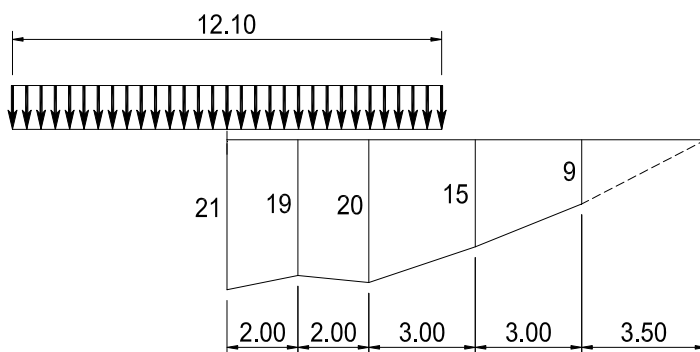
Letture	Carichi/flessimetri	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Scarico	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	n.2 camion	0	6	9	4	0	1	13	8	3
3	n.4 camion	0	12.5	21	14.5	0	19	20	15	9
4	n.2 camion	0	10	8	5	0	11	16	13	8
5	Scarico	0	2	-2	-2	0	0	3	1	0

In queste prove di carico si constata l'estrema modestia delle inflessioni e talvolta lo sviluppo dei calcoli può essere influenzato da tale particolarità.

I calcoli successivi faranno riferimento al massimo carico.

Coefficiente di ripartizione trasversale

Per il massimo carico i flessimetri della sezione in mezzeria hanno dato



Coefficiente di ripartizione trasversale

Calcolo dell'area $\frac{A}{2}$ dove si ipotizza lo zero a 3,5m oltre l'ultima misura.

$$\frac{A}{2} = \frac{21+19}{2} \times 2 + \frac{19+20}{2} \times 2 + \frac{20+15}{2} \times 3 + \frac{9}{2} \times 3.5 = 189.25 \quad A = 378.5$$

$$q = \frac{fm \cdot b}{A} p = \frac{21 \times 12.10}{378.5} p = 0.6713 p$$

$$K_1 = 0.6713$$

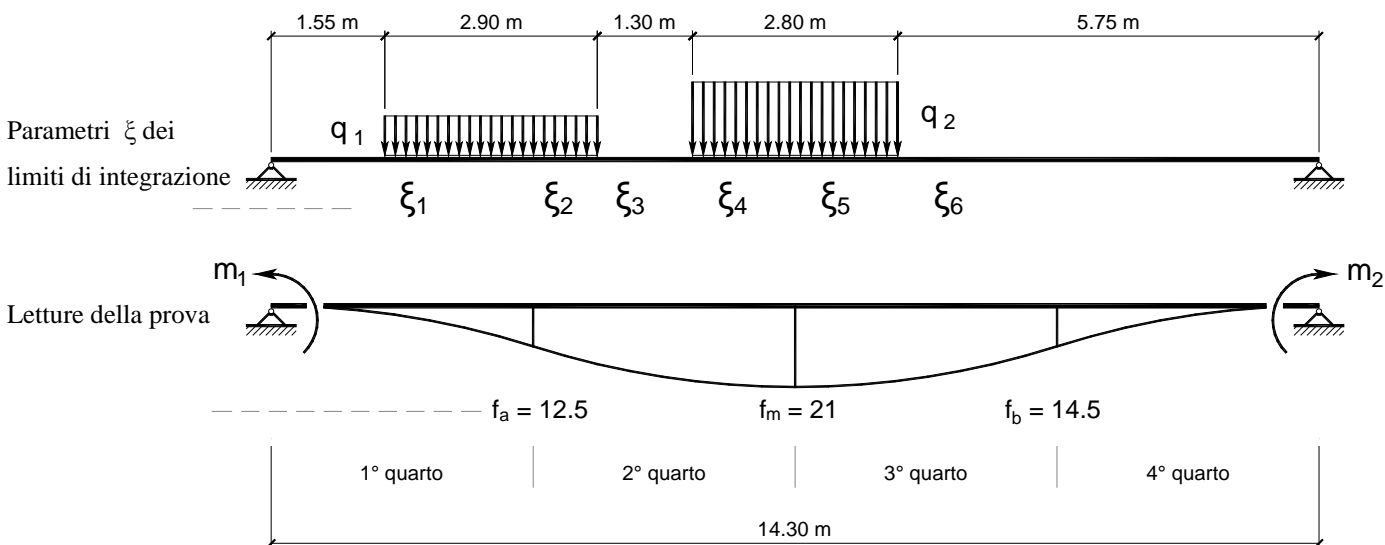
Quindi la striscia di solaio centrale larga 1m è caricata con

$$q_1 = 0.6713 \frac{113.700}{2.8 \times 12.8} = 2130 \text{ Kg/m}^2$$

La striscia laterale è caricata con $q_2 = 0.6213 \times \frac{63600}{2.9 \times 12.8} = 1150 \text{ daPa}$

Calcoli teorici

- Determinazione dei gradi d'incastro m_1 ed m_2
- Dati geometrici



Larghezza del solaio di prova $b = 1m$

Luce trave $\ell = 14.30m$ $EJ = 12.4 \times 10^{12} daN \cdot cm^2$ di progetto

Tale valore è stato ottenuto ipotizzando una $E = 30.000M$

In fase di collaudo tale valore è stato riscontrato ridotto pari a $E = 27.500M$

Quindi la rigidezza reale risulta essere $EJ = 11.37 \times 10^{12} daN \cdot cm^2$ per la striscia larga 1m.

$$K = \frac{24EJ}{\ell^3}$$

- Carichi $q_1 = 11.5 daN/cm$ $q = 21.3 daN/cm$ $q_1 = 0.549q$

- Parametri dei limiti di integrazione dei carichi

$$\xi_1 = \frac{155}{1430} = 0.1084, \quad \xi_2 = \frac{357.5}{1430} = 0.25, \quad \xi_3 = \frac{445}{1430} = 0.3122$$

$$\xi_4 = \frac{575}{1430} = 0.4021, \quad \xi_5 = 0.5, \quad \xi_6 = 0.5979$$

Dalla teoria si ha

$$\frac{K}{\ell} fa_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} q_1 A_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_3} q_1 A_2(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_6} q A_2(\xi) d\xi$$

$$\frac{K}{\ell} fm_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_3} q_1 B_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_5} q B_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_5}^{\xi_6} q B_2(\xi) d\xi$$

$$\frac{K}{\ell} fb_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_3} q_1 C_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_6} q C_1(\xi) d\xi$$

dove A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 sono le funzioni note

Integrando le funzioni fra i limiti indicati si ottiene come negli esempi precedenti

$$\frac{K}{\ell} fa_0 = q \times 1.4846$$

$$\frac{K}{\ell} fm_0 = q \times 2.0493$$

$$\frac{K}{\ell} fb_0 = q \times 1.38666$$

Gli spostamenti dovuti anche alle coppie m_1 ed m_2 d'incastro dove $m_1 = a_1 q \ell^2$ ed $m_2 = a_2 q \ell^2$ e ponendo $H_1 = \frac{384EJ}{q\ell^4} = \frac{K}{q}$ le (28) divengono

$$\begin{cases} H_1 f a = 1.4846 - 21a_1 - 15a_2 \\ H_1 f m = 2.0493 - 24a_1 - 24a_2 \text{ dove } \alpha = 1.4846 \quad \beta = 2.0493 \quad \gamma = 1.38666 \\ H_1 f b = 1.38666 - 15a_1 - 21a_2 \end{cases}$$

Sostituendo nelle (29) i valori α, β, γ , ed i valori di spostamenti $f a = 12.5$ $f m = 21$ $f b = 14.5$ ottenuti dalla prova carico si ha $a_1 = 0.038657$ $a_2 = 0.007290$.

Per la striscia di solaio in questione larga 1m, i momenti d'incastro valgono

$$m_1 = a_1 q \ell^2 = 0.038657 \times 2130 \times 14.3^2 = 16837 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_2 = a_2 q \ell^2 = 0.007293 \times 2130 \times 14.3^2 = 3176 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

La freccia in mezzeria vale

$$H_1 \times f t = 2.0493 - 24a_1 - 24a_2 = 0.946572$$

$$H_1 = \frac{384EJ}{q\ell^4} = \frac{384 \times 11.37 \times 10^{12}}{21.3 \times 1430^4} = 49.01$$

$$f_t = \frac{0.946572}{49.01} = 0.01931 \text{ cm} \text{ valore assai prossimo allo spostamento reale di collaudo } f m \text{ pari a } 0.021 \text{ cm.}$$

Conclusioni e considerazioni finali

- Dai calcoli esposti si evince che il bordo che nei calcoli di progetto considerato appoggiato, produce in effetti un vincolo reale flessionale seppure modesto.
- Il carico uniforme sul solaio equivalente a quelle di prova, approssimativamente, risulta: dalle

$$M_m = \frac{1}{8} q \ell^2 - (m_1 + m_2) \frac{1}{2}$$

$$\text{si ha } 24.237 = \frac{1}{8} q 14.3^2 - 10.006 \quad q = 1000 \text{ KPa} \text{ contro i } 2000 \text{ KPa} \text{ richiesti dal progetto.}$$

- La freccia di prova $f_m = 0.021 \text{ cm}$ è molto simile a quella teorica pari a $f_t = 0.01931$ a conferma della correttezza della procedura pur nell'incertezza delle misurazioni
- Per altro risulta estremamente limitata pari a $\frac{0.021}{1430} = \frac{1}{68000}$ della luce a conferma dell'estrema rigidità della struttura.
- Infine a scarico avvenuto il ritorno è stato perfettamente elastico.