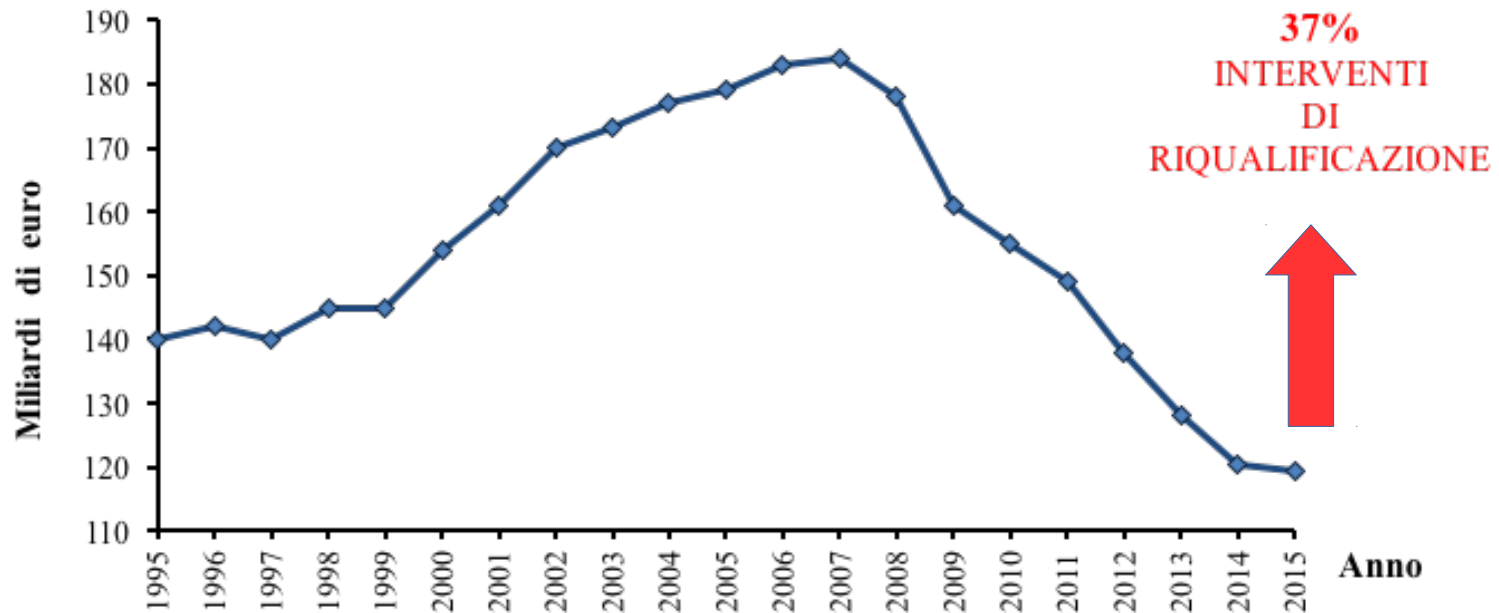


# Identificazione Parametrica con Analisi Modale Sperimentale

Dott. Ing. Flavio Stochino

## Introduzione e motivazioni

Andamento degli investimenti nelle costruzioni in Italia: a fronte di una crisi sistemica solo gli interventi di ristrutturazione subiscono un incremento.



Osservatorio congiunturale sull'industria delle costruzioni – Elaborazione Ance su dati Istat - Luglio 2015

# Introduzione e motivazioni

Incognite nel progetto strutturale di riqualificazione:

- Caratteristiche dei materiali?
- Effettive condizioni di vincolo?
- Geometria della struttura?



Incognite nel progetto strutturale di riqualificazione:

- Caratteristiche dei materiali?
- Effettive condizioni di vincolo?
- Geometria della struttura?



Tecniche di Indagine non distruttive → Analisi Modale Sperimentale OMA

Riduzione dei costi

Necessità di una profonda conoscenza del problema dinamico-strutturale

- Introduzione e motivazioni
- Vibrazione e dinamica delle strutture
- Analisi Modale Sperimentale
- Esempi applicativi:
  - Caso studio 1
  - Caso studio 2
  - Algoritmi di ottimizzazione
  - Caso studio 3

## La dinamica strutturale: una imprescindibile necessità

È evidente che il corretto approccio all'analisi dei fenomeni indicati non può prescindere da considerazioni dinamiche.

### **Nella statica:**

le azioni vengono applicate molto lentamente e le rispettive deformazioni avvengono contemporaneamente;

le forze inerziali legate alla massa degli elementi costruttivi sono del tutto trascurabili; in assenza di azioni il sistema resta in quiete.

### **Nella dinamica:**

le azioni vengono applicate velocemente e le rispettive deformazioni seguono con un certo ritardo;

le forze inerziali legate alla massa degli elementi costruttivi non sono trascurabili; anche in assenza di forze applicate il sistema è suscettibile di movimento.

## Statico o dinamico?

La linea di demarcazione fra statica e dinamica sembra quindi essere la velocità di applicazione delle azioni.

**Quando possiamo definire un'azione veloce?**

**E quando lenta?**

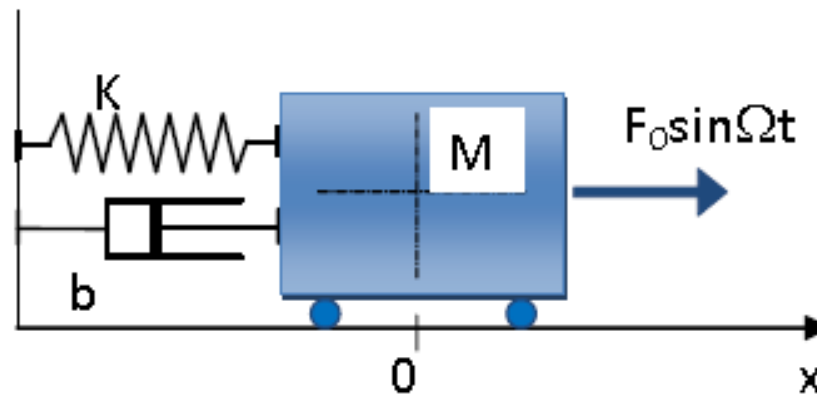
In generale un carico è quasi-statico quando è applicato così lentamente che le conseguenti deformazioni strutturali hanno bassissime velocità e le forze di inerzia sono così piccole da poter essere trascurate.

Al contrario un carico dinamico causa delle vibrazioni strutturali così grandi che le forze inerziali non possono essere trascurate.

## Oscillatore ad un grado di libertà

È il modello fisico più semplice.

Dalla sua analisi è possibile desumere i concetti fondamentali della dinamica delle costruzioni.



Riconosciamo nel modello gli elementi essenziali di un sistema dinamico:

una massa  $M$

un elemento di richiamo  $K$

un elemento dissipativo  $b$

una forzante  $F(t)$



## Il principio di d'Alembert 1/3

**Il principio di d'Alembert (1717-1783)** è un'estensione del **principio dei lavori virtuali** e stabilisce che in ogni istante ogni stato del moto può essere considerato come uno stato di **equilibrio meccanico**, qualora siano introdotte delle appropriate **forze inerziali**.

La seconda legge della dinamica dice che per un punto di massa **m** vale la seguente relazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

o meglio:

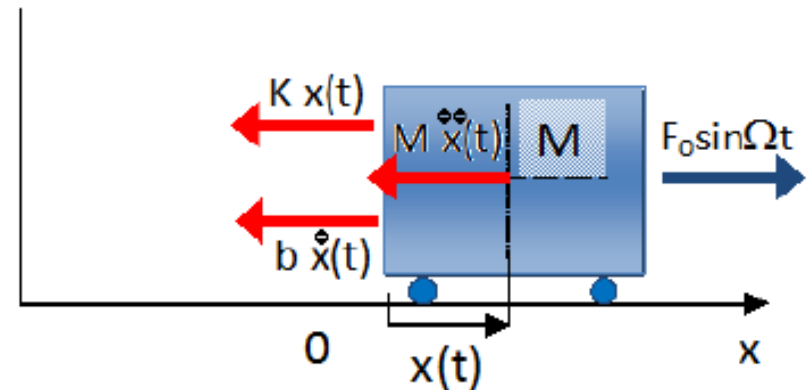
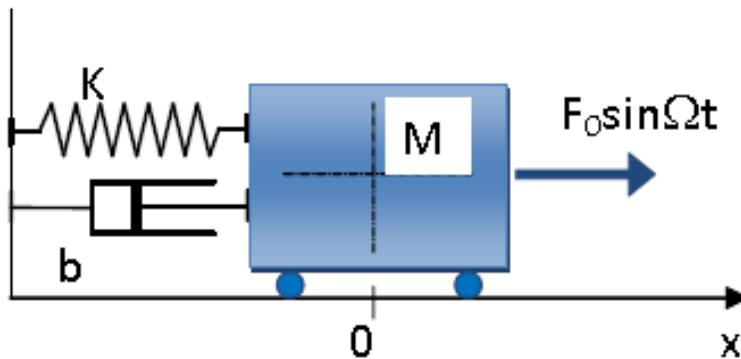
$$\vec{F} - m\vec{a} = \vec{R}_i = 0$$

Cioè chiamando forze di inerzia il prodotto della massa del punto per la sua accelerazione cambiato di segno, possiamo dire che la risultante di questa forza e di quelle esterne agenti sul punto deve essere in ogni istante nullo.

## Il principio di d'Alembert 2/3

Il concetto di equilibrio dinamico ci consente di applicare i metodi della statica anche alla dinamica, a patto di tenere conto delle forze inerziali.

Nell'equazione dell'equilibrio possono anche essere inserite le forze dissipative legate alla velocità del nostro elemento.



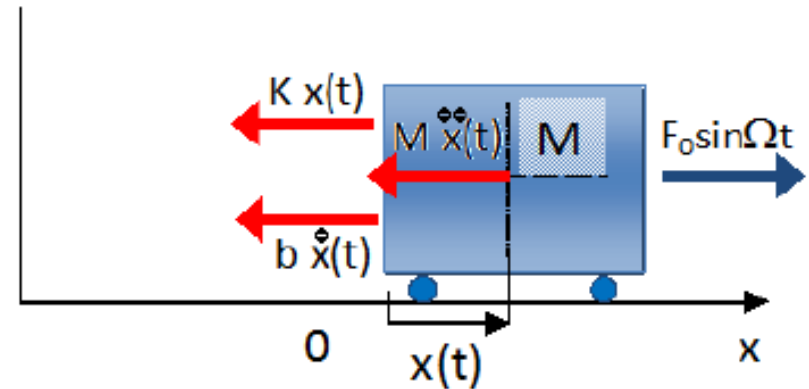
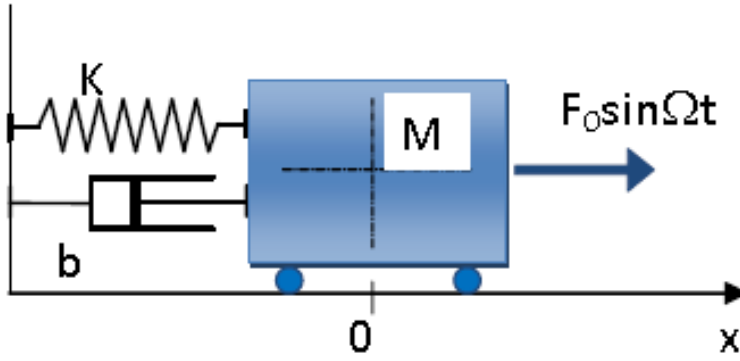
Imposto uno spostamento  $x(t)$  al baricentro della massa (Metodo degli Spostamenti) risultano:

$K \cdot x(t)$  forza di richiamo proporzionale allo spostamento

$b \dot{x}(t)$  forza dissipativa proporzionale alla velocità

$M \ddot{x}(t)$  forza di inerzia proporzionale all'accelerazione

## Il principio di d'Alembert 3/3



$$M\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$kx(t)$  forza di richiamo proporzionale allo spostamento

$b\dot{x}(t)$  forza dissipativa proporzionale alla velocità

$M\ddot{x}(t)$  forza di inerzia proporzionale all'accelerazione

## Risoluzione dell'equazione differenziale 1/2

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha \cdot \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{M} \sin \Omega t$$

frequenza angolare (rad/sec)

$$\omega := \sqrt{\frac{K}{M}}$$

frequenza (1/sec)

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

periodo (sec)

$$T := \frac{1}{f}$$

modulo di smorzamento

$$\alpha := \frac{b}{2 \cdot M}$$

smorzamento critico

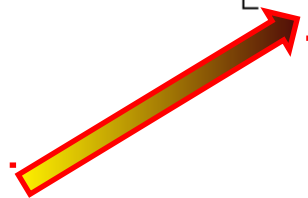
$$b_{\text{crit}} := 2 \cdot \sqrt{K \cdot M}$$

freq. ang. smorzata

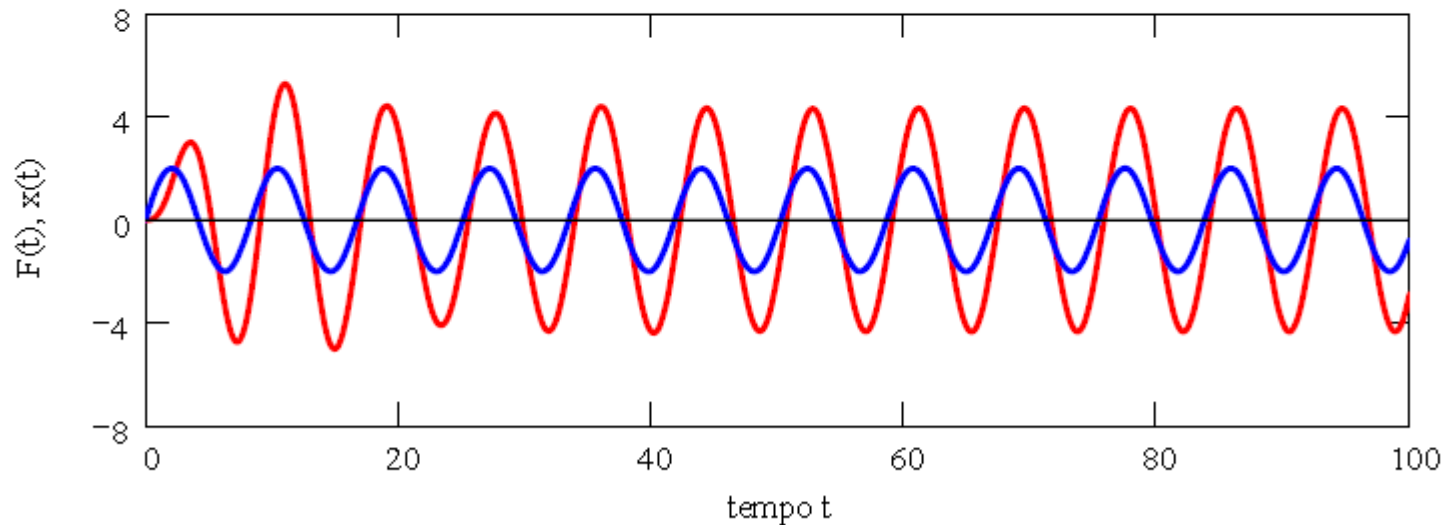
$$\beta := \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

# Risoluzione dell'equazione differenziale 2/2

$$x(t) := \frac{F_0}{M} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \cdot \alpha \Omega)^2} \cdot \left[ \left[ (\omega^2 - \Omega^2) \cdot \sin(\Omega \cdot t) - 2 \cdot \alpha \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right] \dots \right. \\ \left. + e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left[ 2 \cdot \alpha \cdot \Omega \cdot \cos(\beta \cdot t) + \frac{\Omega}{\beta} \cdot (2 \cdot \alpha^2 + \Omega^2 - \omega^2) \cdot \sin(\beta \cdot t) \right] \right]$$

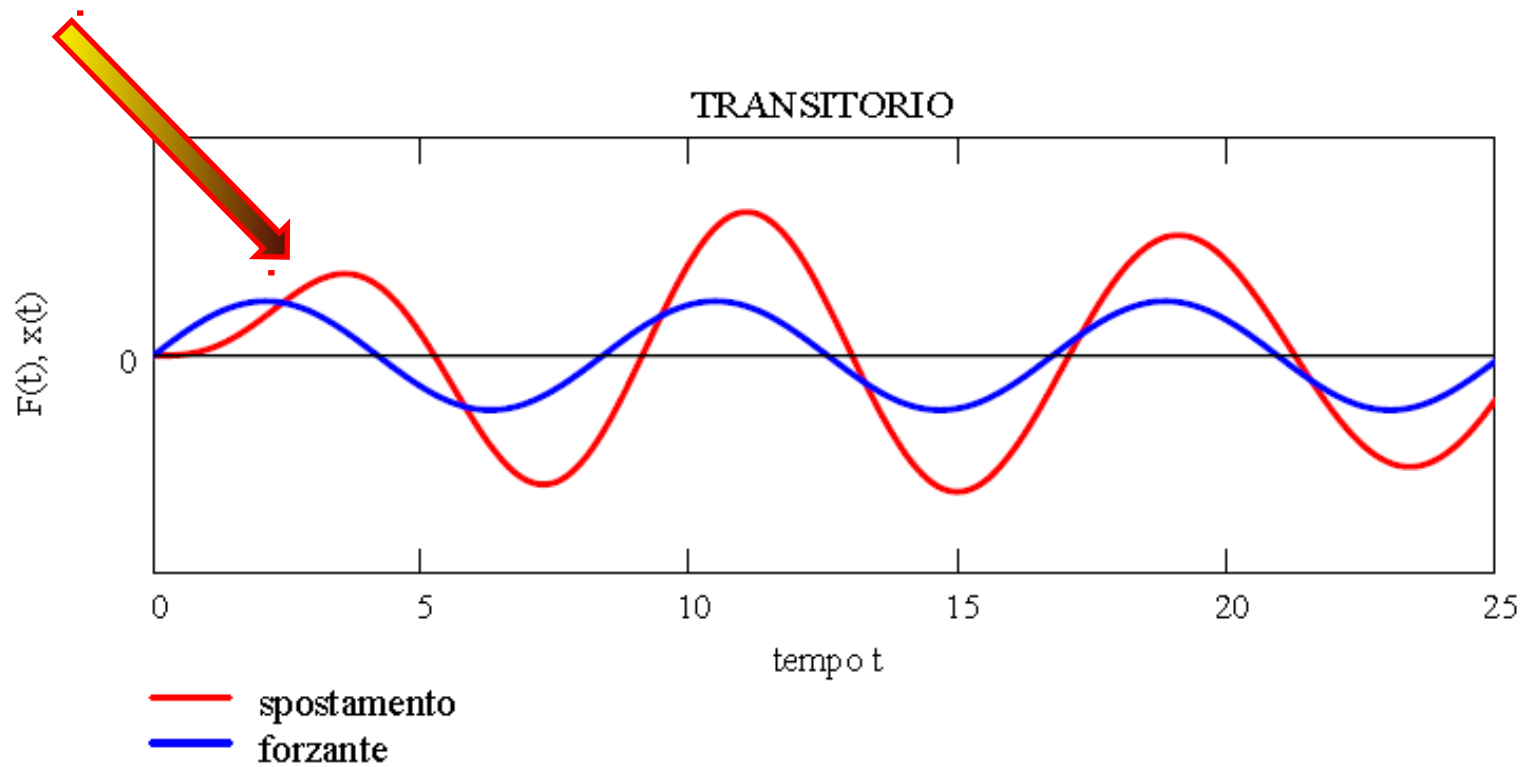


TRANSITORIO + STAZIONARIO

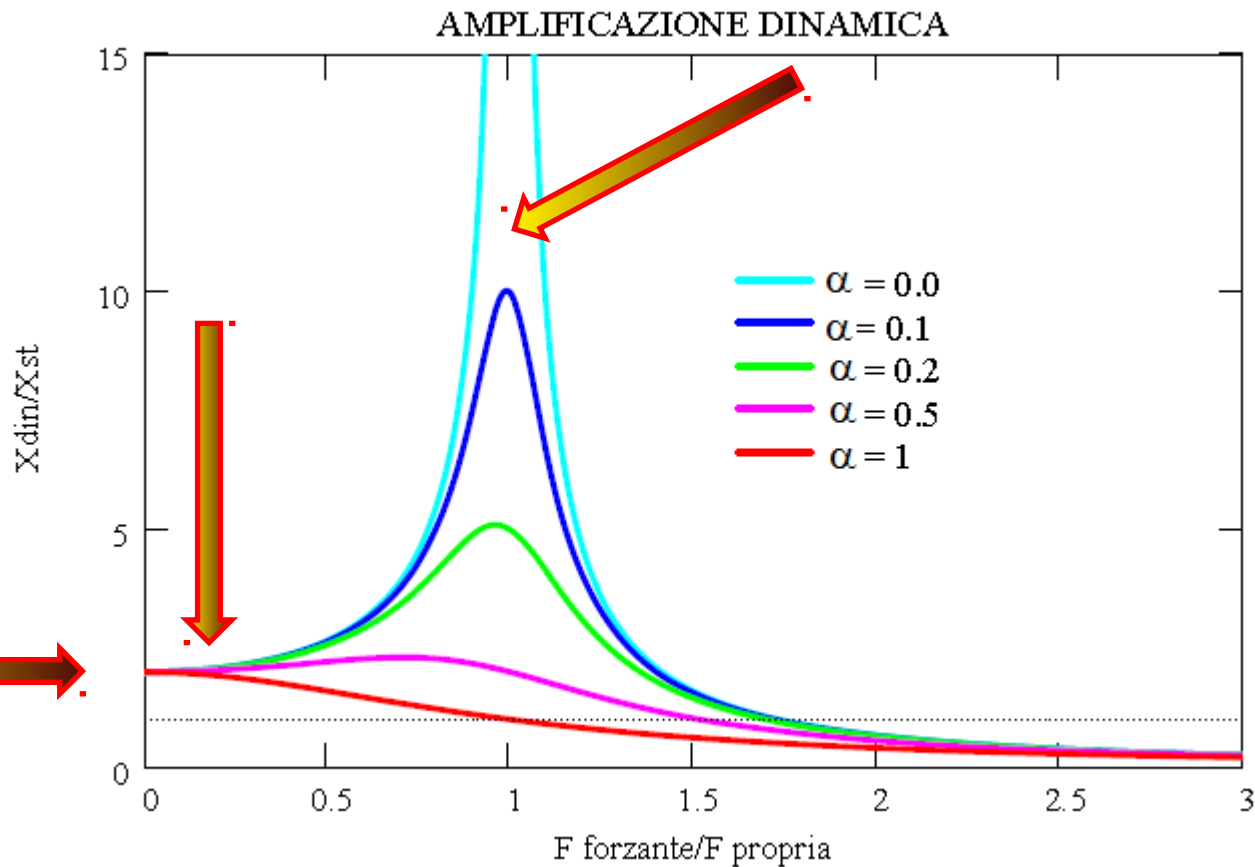


- spostamento
- forzante

# Regime transitorio



# Frequenze di risonanza e smorzamento



Dal grafico si può riconoscere:

il regime quasi statico ( $0 < F_{forzante}/F_{propria} < 0.2$ )

il regime di risonanza ( $F_{forzante}/F_{propria} = 1$ )

# Oscillazioni libere per sistemi a più gradi di libertà non smorzati

$$M \ddot{u} + b \dot{u} + K u = F(t)$$

$$M \ddot{u} + K u = 0$$

$$u = \Psi \cos(\omega t + \phi)$$

$$(K - \omega^2 M) \cos(\omega t + \phi) \Psi = 0$$

$$(K - \omega^2 M) \Psi = 0$$

$\omega_n$  Pulsazioni proprie del sistema

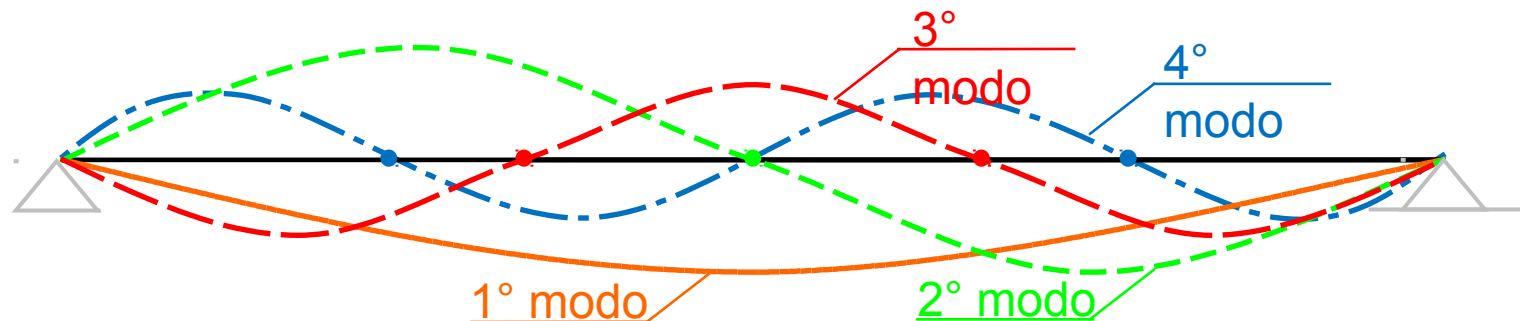
$\Psi_n$  Autovettore corrispondente a n-esima pulsazione

I modi principali di vibrare sono delle particolari soluzioni del sistema in oscillazione libera durante le quali tutte le masse cui corrispondono i gdl  $u$  oscillano in maniera armonica con la stessa frequenza in fase tra loro.



# Oscillazioni libere per sistemi a più gradi di libertà non smorzati

Il nodo è un particolare punto della struttura che non ha alcuna oscillazione durante la vibrazione.



All'aumentare del numero di nodi la struttura risulta come “irrigidita”.

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$$

## Oscillazioni libere per sistemi a più gradi di libertà non smorzati

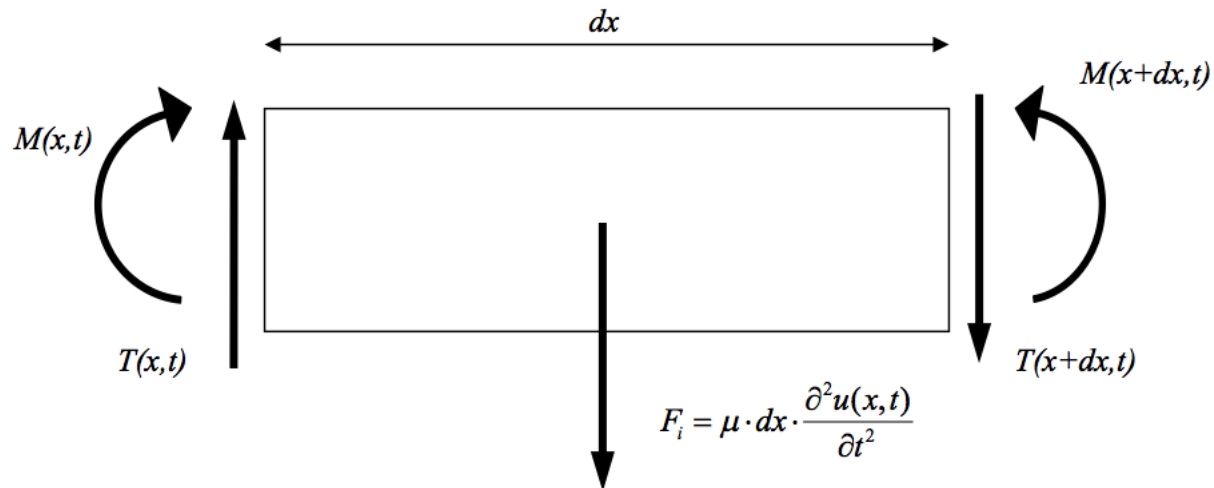
Una delle proprietà più interessanti dei modi propri di vibrare è che l'intero moto del sistema può essere espresso da una loro combinazione lineare:

$$\mathbf{u} = \Psi_1 u_1(t) + \Psi_2 u_2(t) + \dots + \Psi_n u_n(t)$$

Anche per questo motivo, una volta identificate autofrequenze ed autovettori (o autofunzioni) le caratteristiche dinamiche del sistema sono note.

## Sistemi a $\infty$ gradi di libertà: la trave 1/5

Ricorrendo al principio di d'Alembert è possibile scrivere l'equilibrio dinamico della massa elementare  $dm = \mu \cdot dx$ .



Equilibrio alla rotazione:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = T(x,t)$$

Equilibrio alla traslazione:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Equaz. Eulero-Bernoulli

$$EJ \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

## Sistemi a $\infty$ gradi di libertà: la trave 2/5

Equazione dinamica della trave non smorzata senza forzante di Eulero-Bernoulli

$$EJ \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Separazione delle variabili:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) \sin(\omega_j t)$$

$$EJ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^4 u_j(x)}{dx^4} \sin(\omega_j t) - \mu \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 u_j(x) \sin(\omega_j t) = 0$$

Valida per ciascun modo proprio della trave. Di conseguenza si ottiene un sistema di equazioni indipendenti:

$$\frac{d^4 u_j(x)}{dx^4} - \frac{\mu \omega_j^2}{EJ} u_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

## Sistemi a $\infty$ gradi di libertà: la trave 3/5

$$\frac{d^4 u_j(x)}{dx^4} - \frac{\mu \omega_j^2}{EJ} u_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

La cui soluzione generale è:

$$u_j(x) = A_1 \sin\left(\frac{\lambda_j x}{l}\right) + A_2 \cos\left(\frac{\lambda_j x}{l}\right) + A_3 \sinh\left(\frac{\lambda_j x}{l}\right) + A_4 \cosh\left(\frac{\lambda_j x}{l}\right).$$

Le costanti di integrazione  $A_i$  si determinano in funzione delle condizioni al contorno. Ad esempio, per la trave semplicemente appoggiata abbiamo:

$$u_j(0) = 0, \quad u_j(l) = 0, \quad \frac{du_j^2(0,t)}{dx^2} = 0, \quad \frac{du_j^2(l,t)}{dx^2} = 0.$$



$$A_2 = A_3 = A_4 = 0 \quad \text{and} \quad \sin \lambda_j = 0,$$

## Sistemi a $\infty$ gradi di libertà: la trave 4/5

$$A_2 = A_3 = A_4 = 0 \quad \text{and} \quad \sin \lambda_j = 0,$$

Da cui si desume l'equazione di frequenza per la trave semplicemente appoggiata:

$$\lambda_j = j\pi, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_j^2 = \frac{\lambda_j^4}{l^4} \frac{EJ}{\mu}$$

$$f_j = \frac{\lambda_j^2}{2\pi l^2} \left( \frac{EJ}{\mu} \right)^{1/2}$$

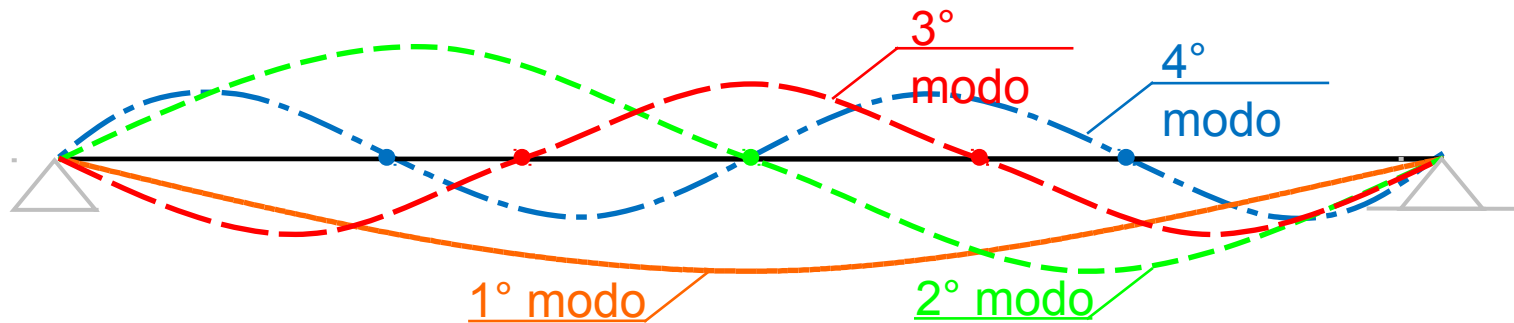
$$u(x) = A_j \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right)$$

# Sistemi a $\infty$ gradi di libertà: la trave 5/5

$$f_j = \frac{\lambda_j^2}{2\pi l^2} \left( \frac{EJ}{\mu} \right)^{1/2}$$

$$u(x) = A_j \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right)$$

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$



## Analisi Modale Sperimentale

Obiettivo dell'analisi modale sperimentale è la determinazione delle autofrequenze, delle forme modali e degli smorzamenti dall'analisi sperimentale delle vibrazioni strutturali.

Ipotesi principali:

- Modelli strutturali a parametri concentrati (e.g. SDOF o MDOF)
- Sistemi lineari



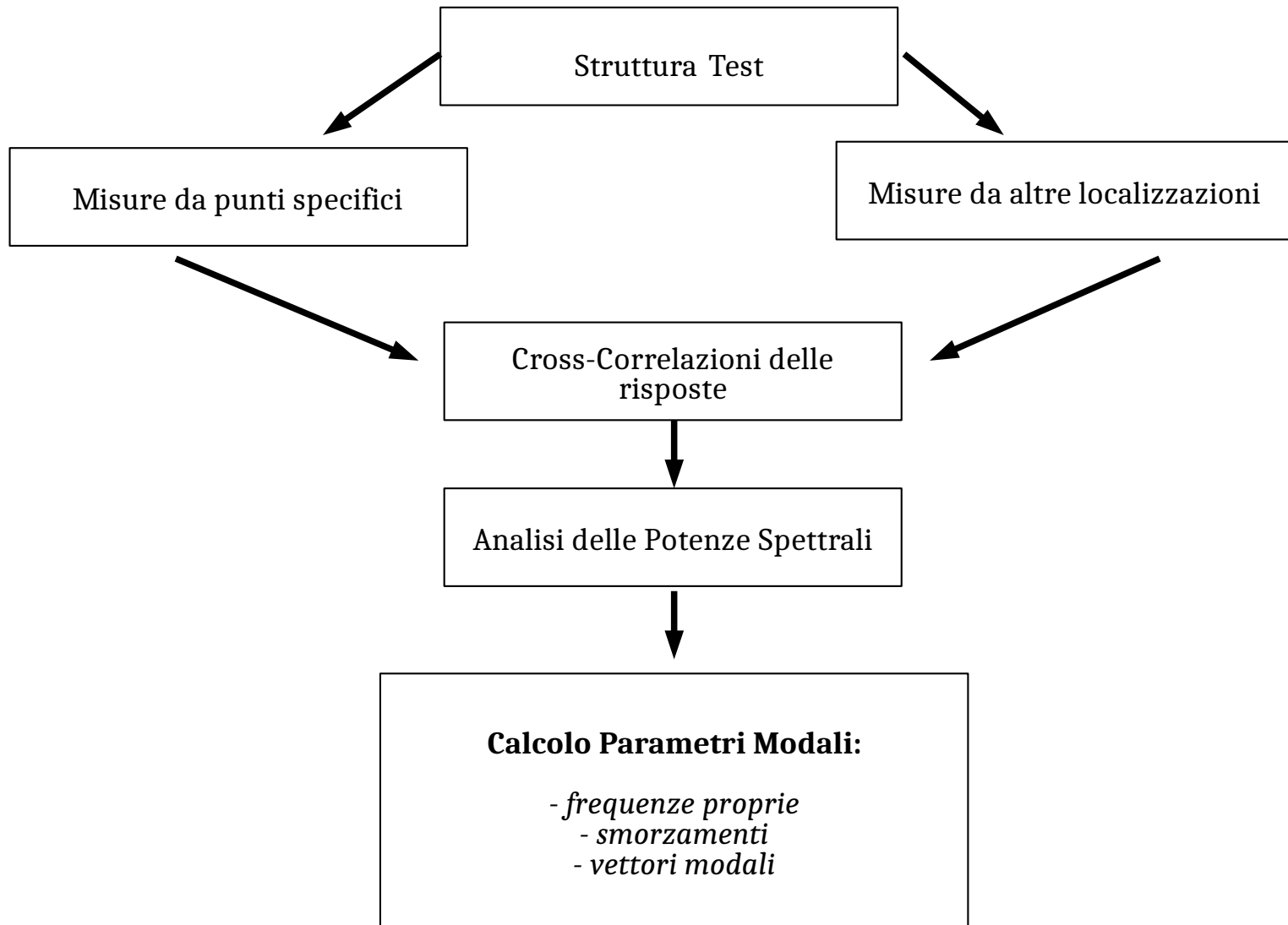
## **Analisi Modale Sperimentale - Output Only**

Chiamata Operational Modal Analysis.

Approccio in cui non necessario misurare l'entità della forzante, ma solo la risposta del sistema.

Ipotesi fondamentale: la forza eccitante è assimilabile al rumore bianco.

## Analisi Modale Sperimentale - Output Only



## Analisi Modale Sperimentale - Output Only

**Metodi non Parametrici:** sviluppati nel dominio della frequenza

- Peak Picking
- Frequency Domain Decomposition
- Enhanced Frequency Domain Decomposition

**Metodi Parametrici:** sviluppati nel dominio del tempo

- Stochastic Subspace and Auto Regressive Moving Averages (ARMA) models
- Least Squares Complex Exponential
- Poly Reference Complex Exponential
- Covariance- Driven Stochastic Subspace identification
- Data driven Stochastic Subspace Identification Method (SSI - DATA)

## Analisi di Fourier del segnale 1/3

Un segnale di periodo  $T$  può essere sempre rappresentato da una serie di seni e coseni chiamata serie di Fourier I cui termini sono:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t)$$

where

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

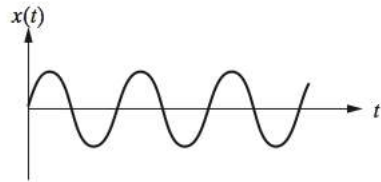
$$a_0 = \frac{2\pi}{T} \int_0^T F(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega_T t dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega_T t dt \quad n = 1, 2, \dots$$

I coefficienti spettrali  $a_n$ ,  $b_n$  rappresentano essenzialmente le informazioni nel dominio delle frequenze del segnale analizzato.

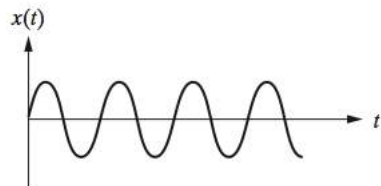
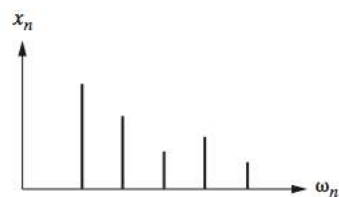
## Analisi di Fourier del segnale 2/3



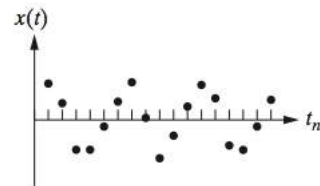
Time signal



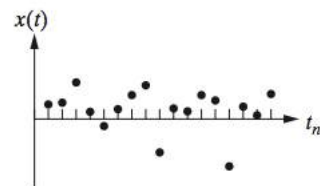
Fourier spectrum



Time signal



Digital record



L'analizzatore del segnale nell'ordine:

- prima converte il segnale analogico in digitale (freq. Di Nayquist)
- quindi calcola i coefficienti spettrali del segnale mediante la versione discreta della trasformata di Fourier.

## Analisi di Fourier del segnale 3/3

$$x_k = x(t_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{N/2} \left( a_i \cos \frac{2\pi i t_k}{T} + b_i \sin \frac{2\pi i t_k}{T} \right) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \cos \frac{2\pi i k}{N}$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \sin \frac{2\pi i k}{N}$$

Considerando che sono stati presi  $N$  campioni si potranno scrivere  $N$  volte queste equazioni generando un sistema lineare:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{a}$$

La soluzione del sistema si ottiene facilmente invertendo la matrice  $\mathbf{C}$ . L'algoritmo che calcola tale matrice è stato inventato da Gauss (1866) ma fu riscoperto da Cooley e Turkey (1965) ed è spesso chiamato FFT.

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$$

Cooley, James W.; Tukey, John W. (1965). "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series". *Math. Comput.* 19: 297-301.

Gauss, Carl Friedrich, "Theoria interpolationis methodo nova tractata", *Werke*, Band 3, 265–327 (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866)

## Trasformata di Fourier

Si definisce trasformata di Fourier di  $f$  la funzione definita nello spazio delle frequenze:

$$F[f] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt$$

Trasformata inversa di Fourier:

$$F^{-1}[F] = f(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

Condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata di Fourier di  $f$  è che tale funzione sia sviluppabile in serie di Fourier in qualunque intervallo  $[-L, L]$

## Peak Picking 1/6

Ipotesi di base:

- Struttura elastica lineare
- Le vibrazioni ambientali eccitano in maniera uniforme tutti i modi di interesse
- I modi devono essere ben separati con basso smorzamento
- Smorzamento di tipo classico

$$\mathbf{u} = \Psi_1 u_1(t) + \Psi_2 u_2(t) + \dots + \Psi_n u_n(t)$$

Trasferiamo l'equazione nel dominio delle frequenze usando la trasformata di Fourier:

$$\mathbf{U} = \Psi_1 U_1(\omega) + \Psi_2 U_2(\omega) + \dots + \Psi_n U_n(\omega)$$

$$U_j(\omega) = H_j(\omega) P_j(\omega)$$

Funzione di risposta in frequenza:

$$H_j(\omega) = \frac{1}{K_j - \omega^2 M_j + i \omega C_j}$$



## Peak Picking 2/6

Tenendo conto che:

$$\ddot{U}(\omega) = \omega^2 U(\omega)$$

L'accelerazione del sistema è esprimibile come:

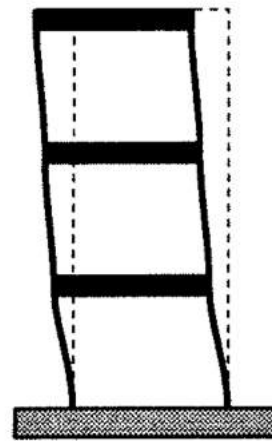
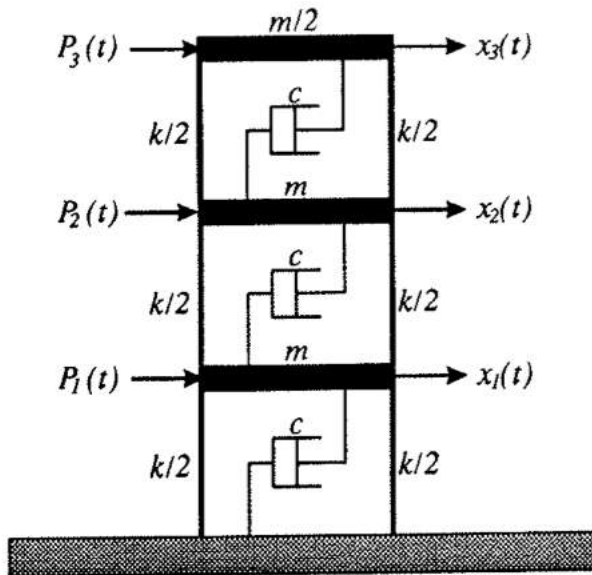
$$\ddot{U} = \omega^2 [\Psi_1 H_1(\omega) P_1(\omega) + \Psi_2 H_2(\omega) P_2(\omega) + \dots + \Psi_n H_n(\omega) P_n(\omega)]$$

Per uno specifico gdl l'accelerazione nel dominio delle frequenze è esprimibile come:

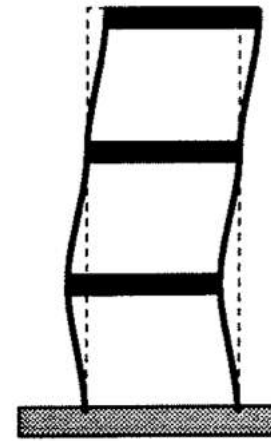
$$\ddot{U}_i = \omega^2 [A_{1i} H_1(\omega) + A_{2i} H_2(\omega) + \dots + A_{ni} H_n(\omega)]$$

$$A_{ji} = \phi_{ji} P_j(\omega)$$

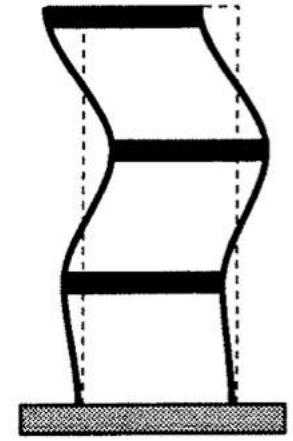
## Peak Picking 3/6



Mode 1,

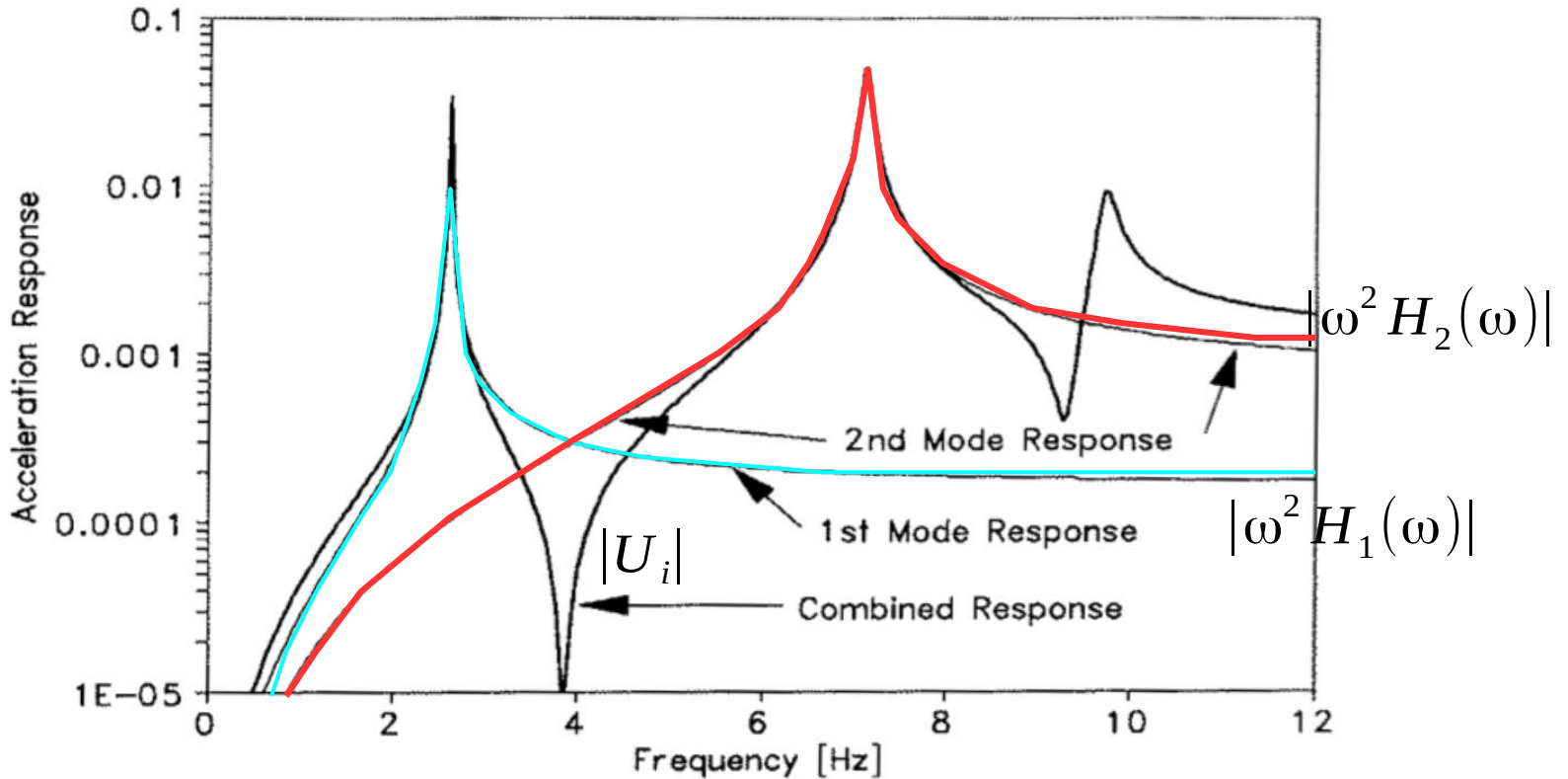


Mode 2,



Mode 3,

## Peak Picking 4/6



$$\ddot{U}_i = \omega^2 [A_{1i} H_1(\omega) + A_{2i} H_2(\omega) + \dots + A_{ni} H_n(\omega)]$$

## Peak Picking 5/6

Allora si può approssimare la risposta in termini di accelerazione per una certa frequenza propria come:

$$\ddot{U}_i(\omega_j) \approx \Psi_{ji} \omega_j^2 H_j(\omega_j) P_j(\omega_j)$$

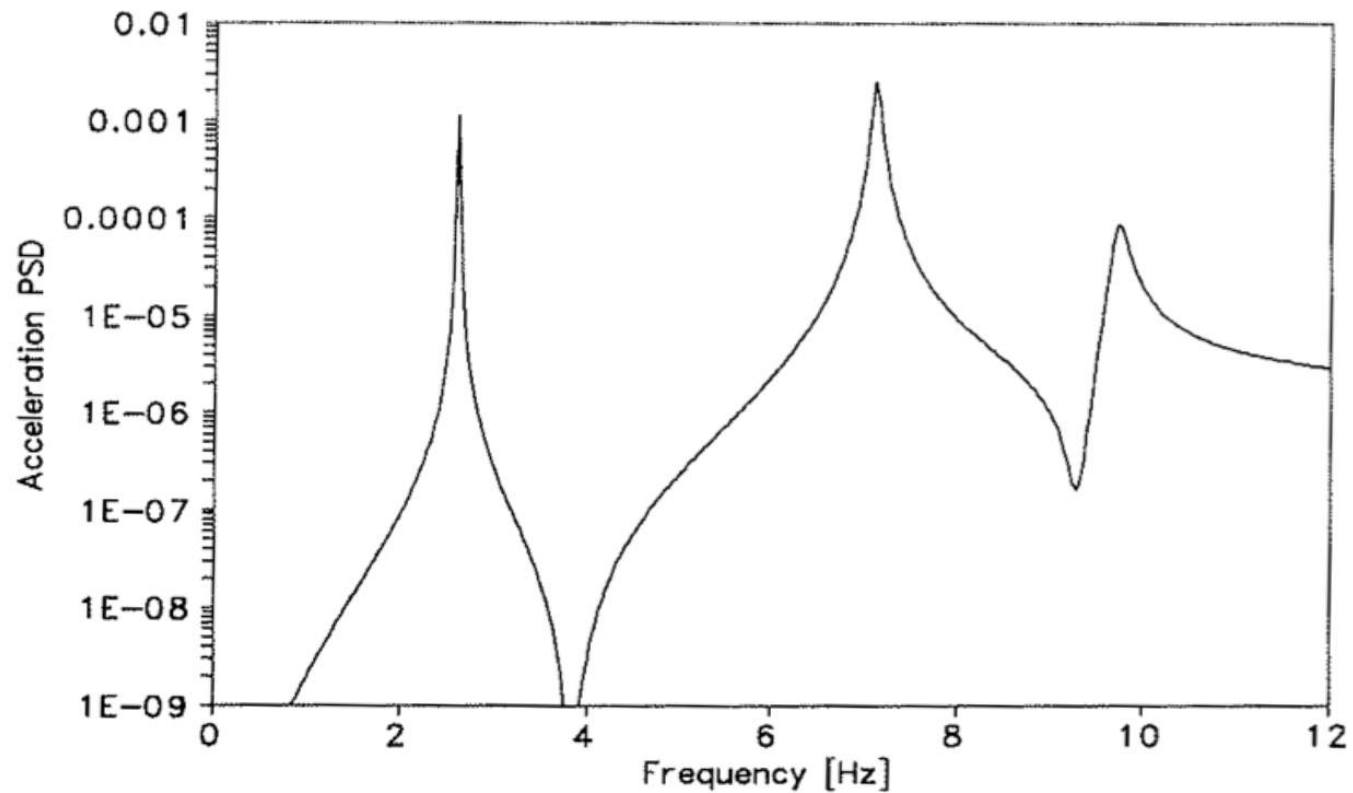
In realtà le autofrequenze di un sistema eccitato dal rumore ambientale analizzando i picchi della densità di potenza spettrale PSD:

$$G_{ii}(\omega) = \ddot{U}_i(\omega) \ddot{U}_i^c(\omega)$$

$\ddot{U}_i^c(\omega)$  è il complesso coniugato di  $\ddot{U}_i(\omega)$

## Peak Picking 6/6

$$G_{ii}(\omega) = \ddot{U}_i(\omega) \ddot{U}_i^c(\omega)$$



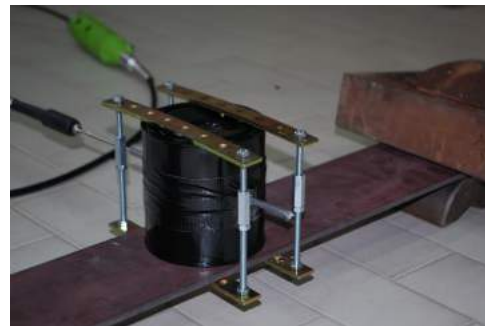
## Hardware di base per l'analisi 1/3

- Generatore di forzante dinamica
- Trasduttore (converte segnale meccanico della struttura in segnale elettrico)
- Amplificatore di segnale
- Sistema di analisi del segnale

## Hardware di base necessario per l'analisi 2/3

- Generatore di forzante dinamica:

Shaker



Vibroдина

Martello Strumentato



## Hardware di base necessario per l'analisi 3/3

- Trasduttore piezoelettrico: I materiali piezoelettrici creano una carica elettrica quando sono deformati.

-Trasduttori di spostamento:

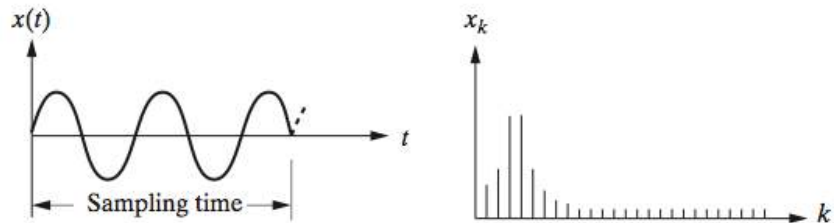
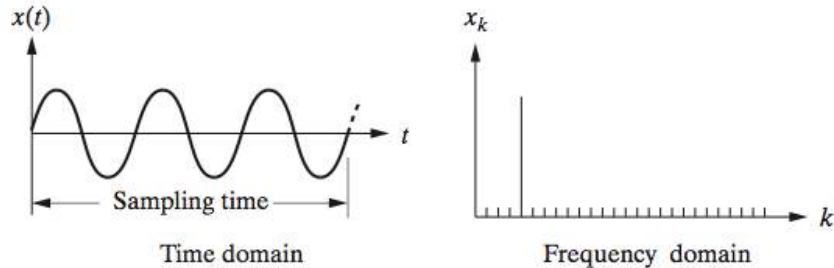


-Accelerometri

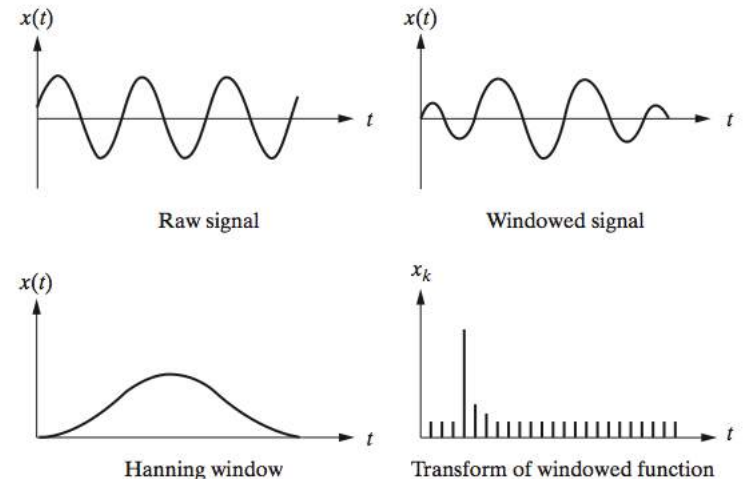


## Leakage

Se non si riesce a campionare su un numero intero di frequenze si possono generare dei risultati spuri:

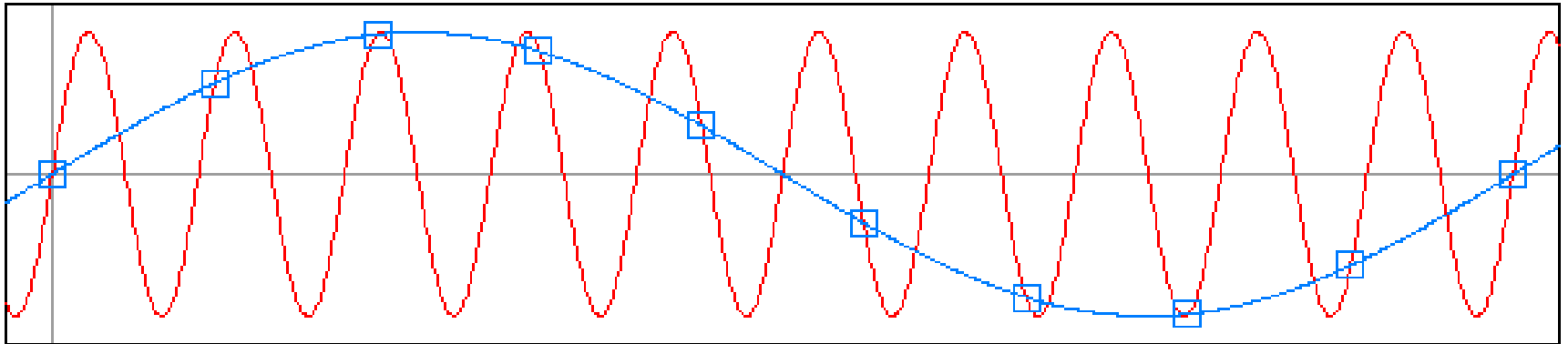


L'errore si corregge dando un certo peso ai segnali compresi nella finestra di analisi. Una delle distribuzioni di pesi più comuni è lo schema di Hanning:



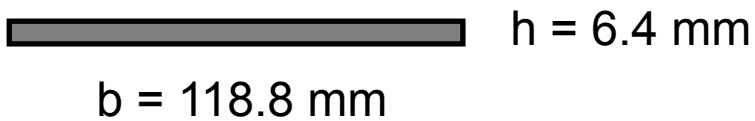
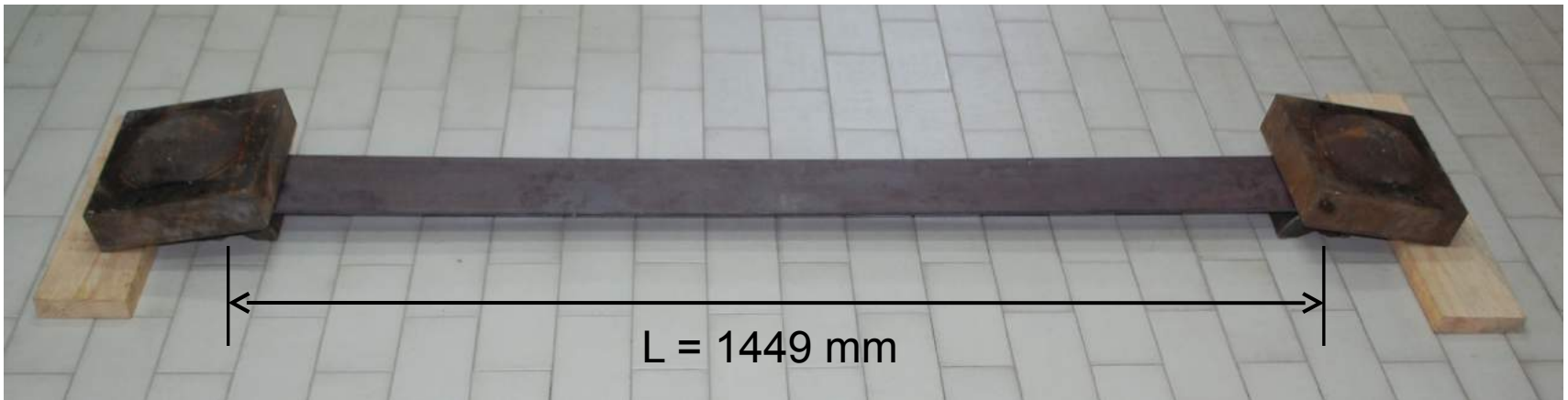
## Aliasing

Se non è scelta accuratamente la frequenza di campionamento si può presentare questo errore.



Secondo il teorema del campionamento di Nyquist-Shannon per campionare un segnale senza perdita di informazione, bisogna campionarlo con frequenza almeno maggiore del doppio rispetto alla frequenza della massima componente spettrale del segnale informativo (detta anche frequenza di Nyquist).

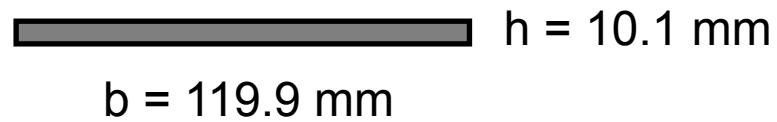
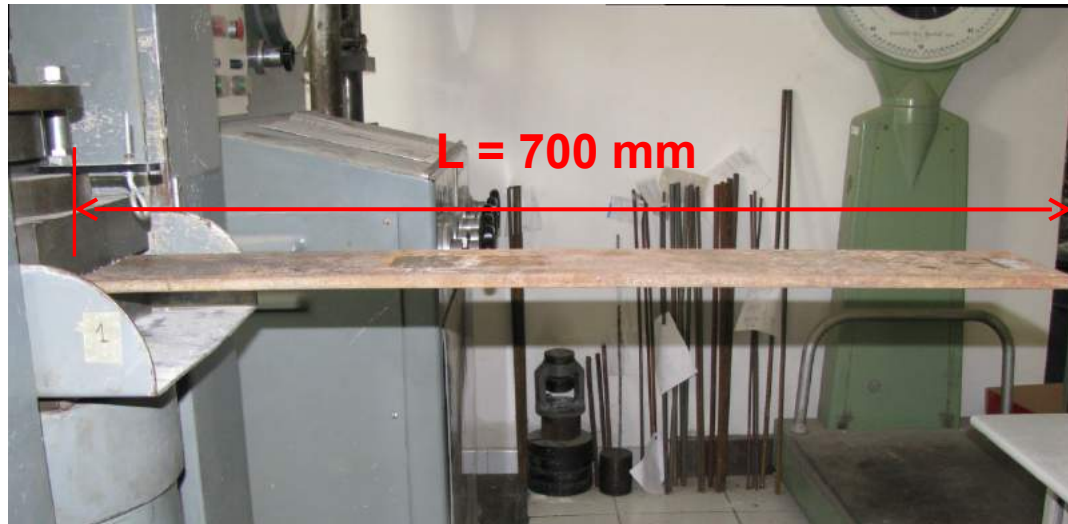
## CASO 1: *Trave in acciaio semplicemente appoggiata*



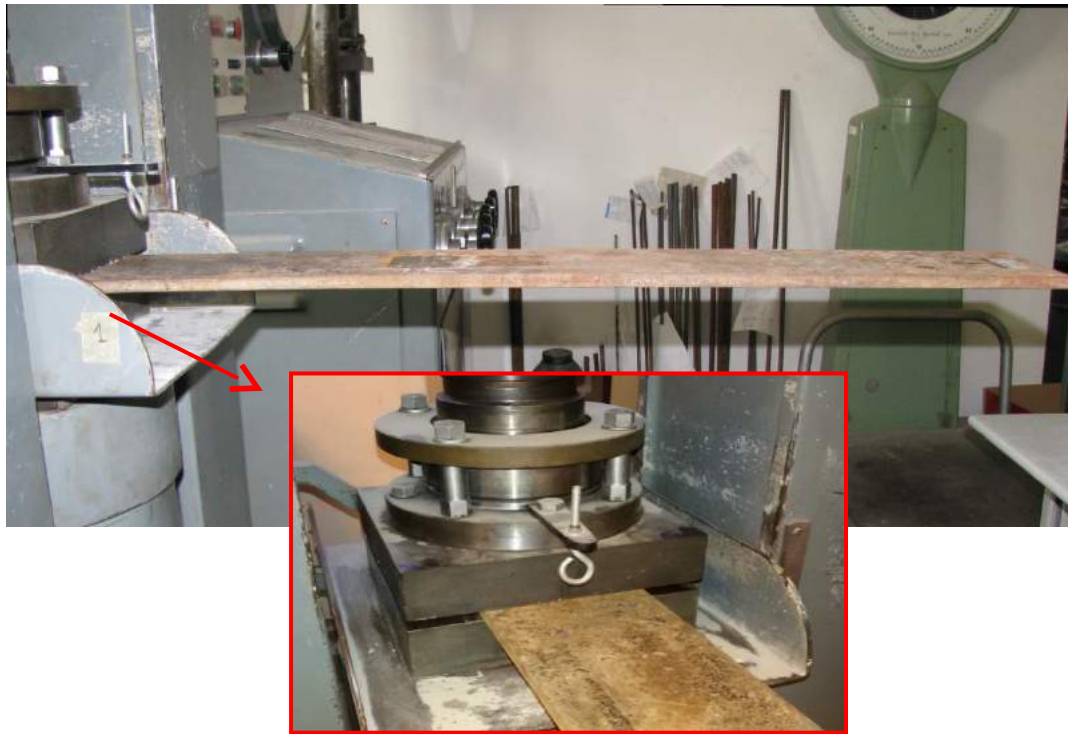
## **CASO 1:** *Trave in acciaio semplicemente appoggiata*



**CASO 2: Trave in acciaio a mensola**



## CASO 2: Trave in acciaio a mensola





## CASO 3: Telaio in acciaio

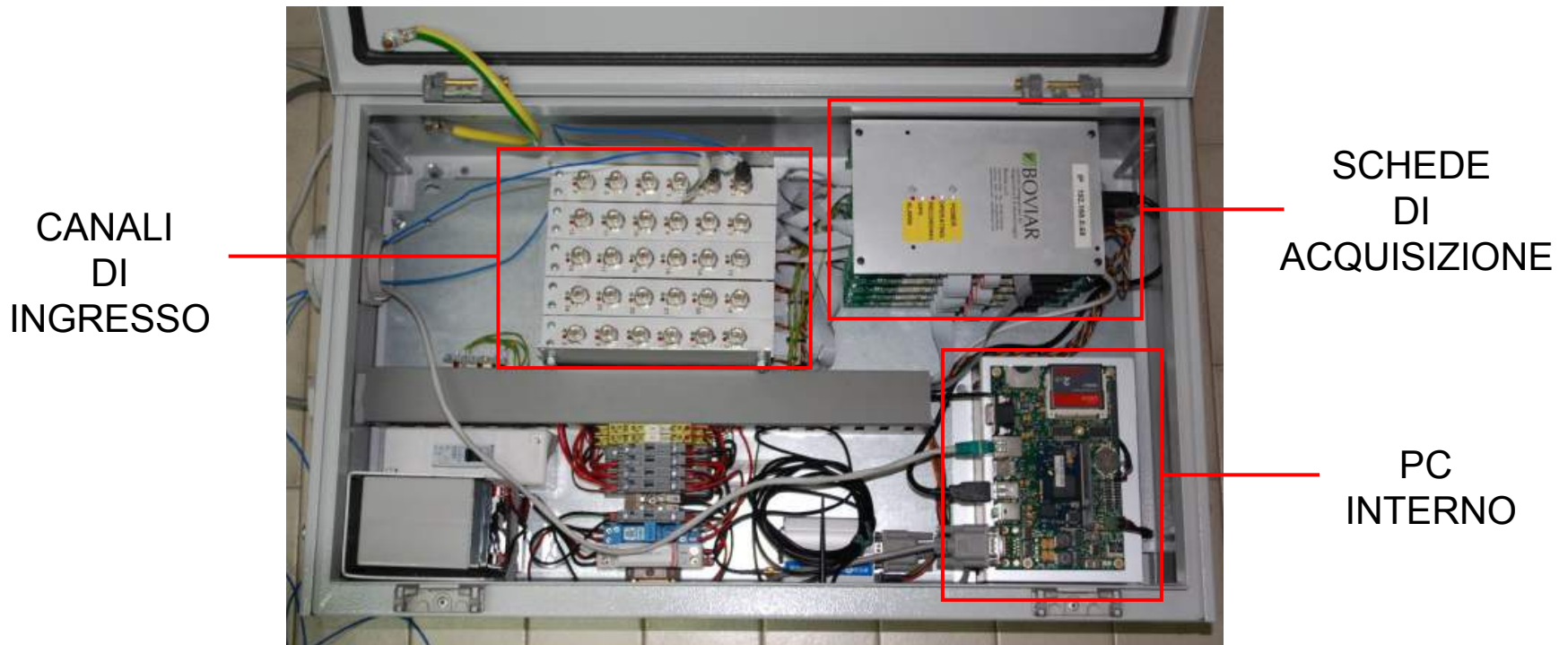


## **Strumentazione utilizzata**



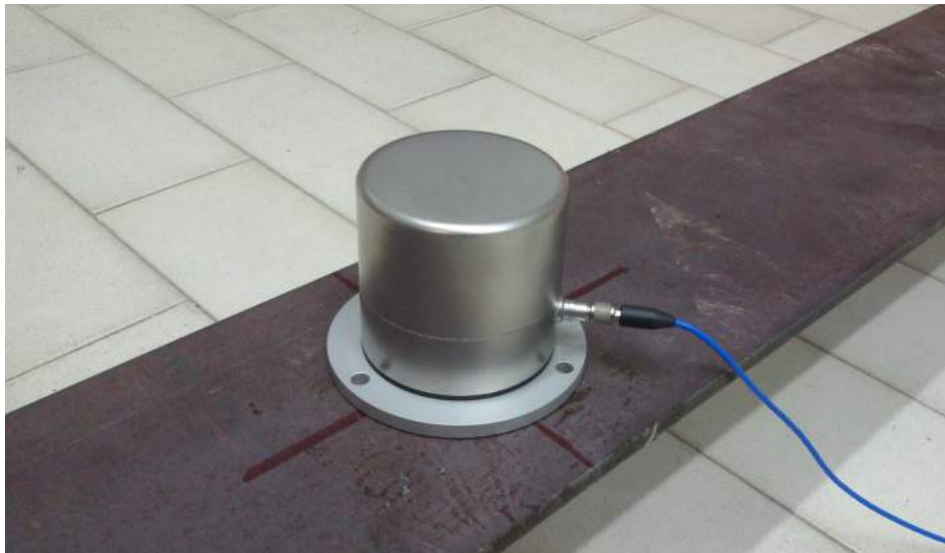
## Strumentazione utilizzata

UNITÀ DI ACQUISIZIONE – DYMAS 24



## Strumentazione utilizzata

ACCELEROMETRO PIEZOELETTRICO  
PCB 393C



- RISOLUZIONE: 10 mg
- SENSIBILITÀ: 1 V/g
- RANGE: 0.025÷800 Hz

## Prove dinamiche

## Prove dinamiche

- Snap-back istantaneo → deformata imposta e rilascio

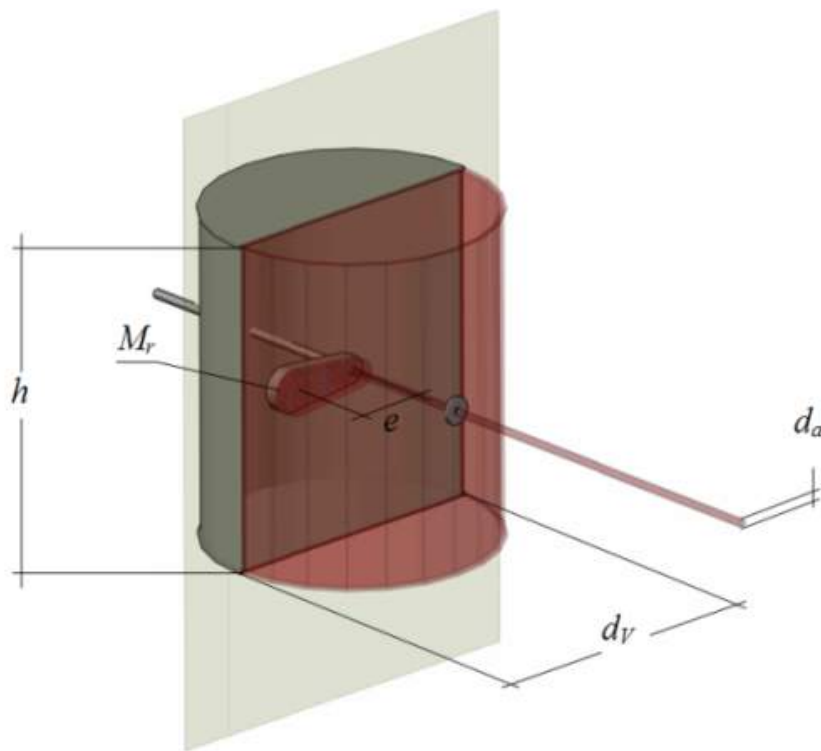


## Prove dinamiche

- Snap-back → deformata imposta e rilascio istantaneo
- Vibrazione forzata → **VIBRODINA**

## Prove dinamiche

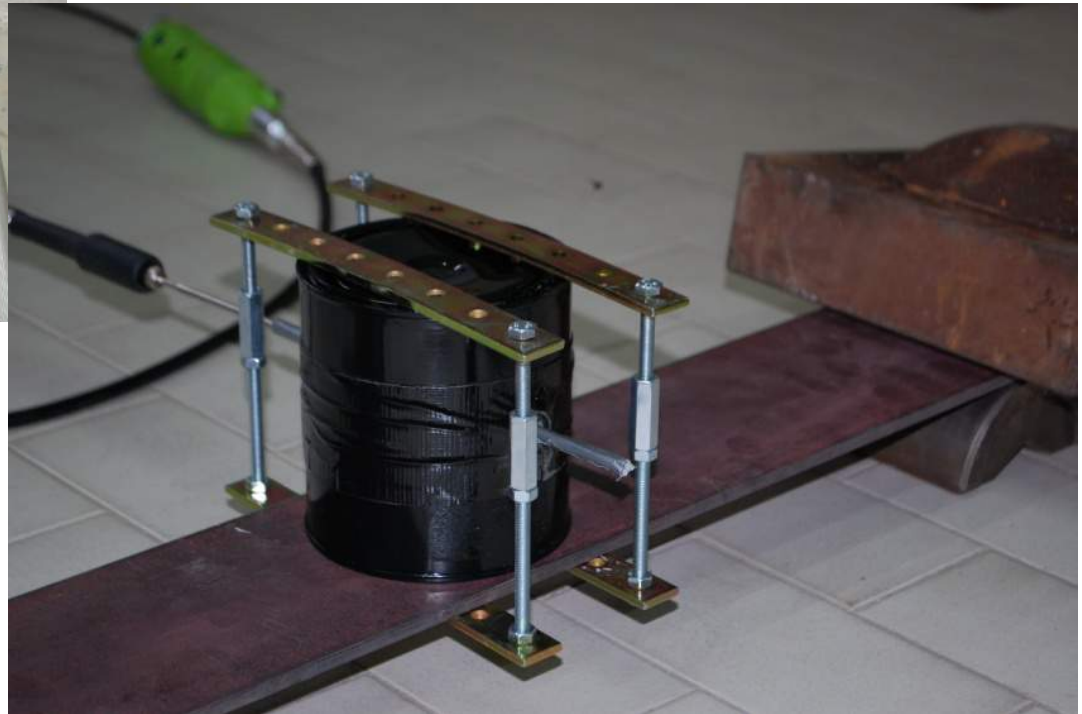
- Snap-back → deformata imposta e rilascio istantaneo
- Vibrazione forzata → **VIBRODINA**



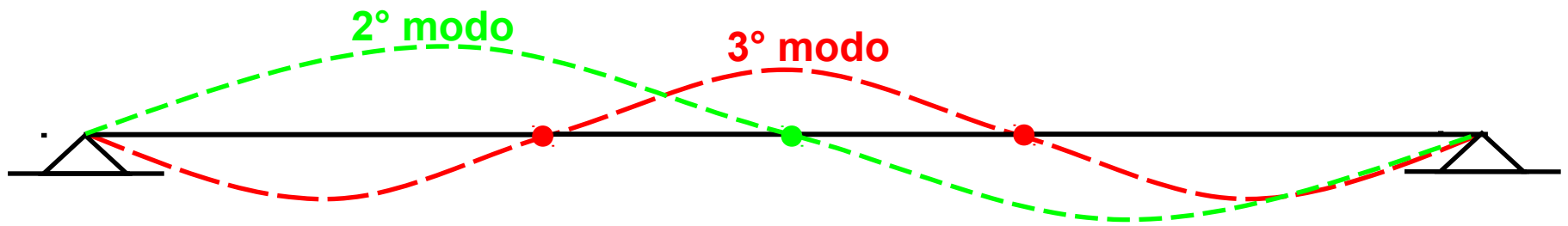
### DIMENSIONI CARATTERISTICHE

VIBRODINA	$h$	120	mm
	$d_v$	110	mm
	$d_a$	3	mm
	$M_r$	50	gr
	$e$	20	mm
MOTORE	Potenza	135	Watt
ELETTRICO	$n^\circ$ giri <sub>max</sub>	35000	giri/min
	$n^\circ$ giri <sub>min</sub>	10000	giri/min

## Esempi applicativi



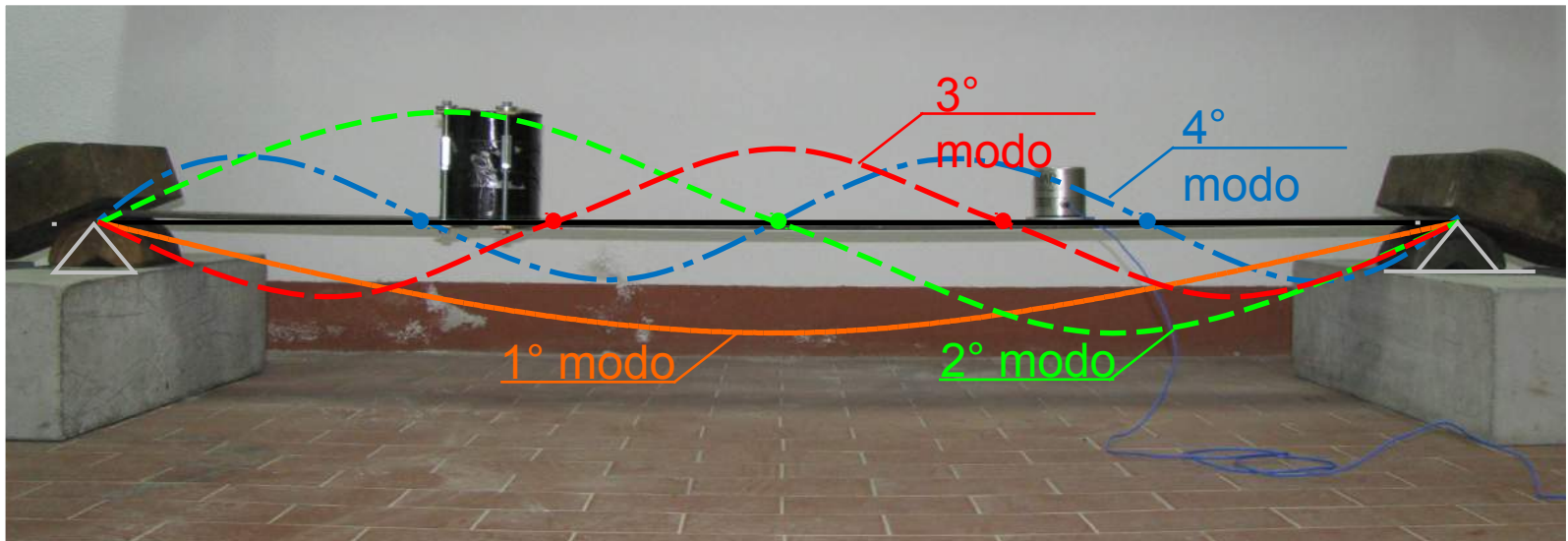
## Esempi applicativi





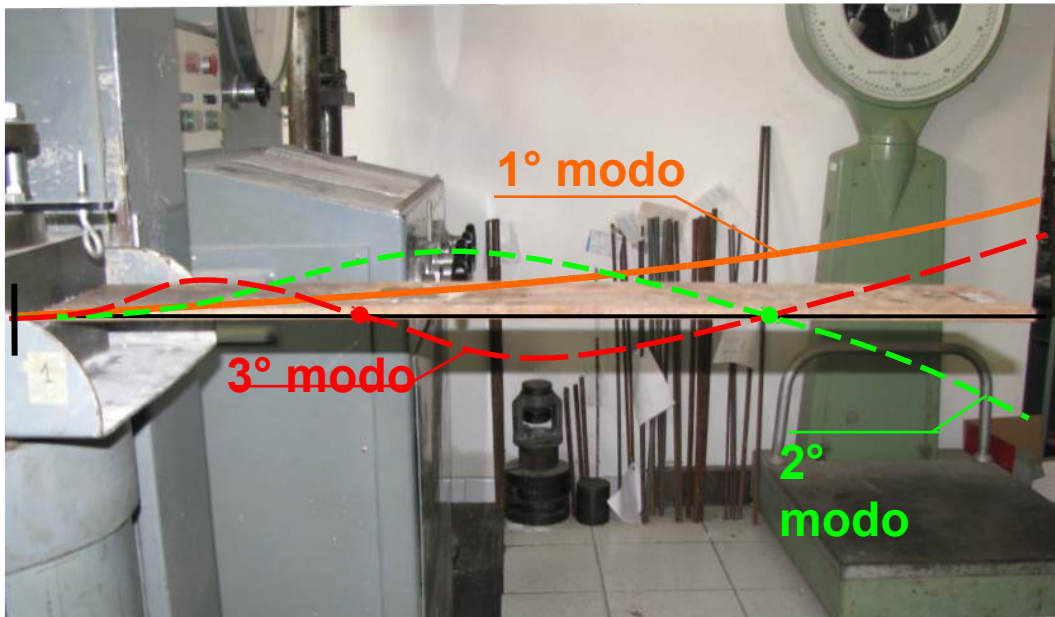
## Configurazione delle prove

### CASO 1: *Trave semplicemente appoggiata*

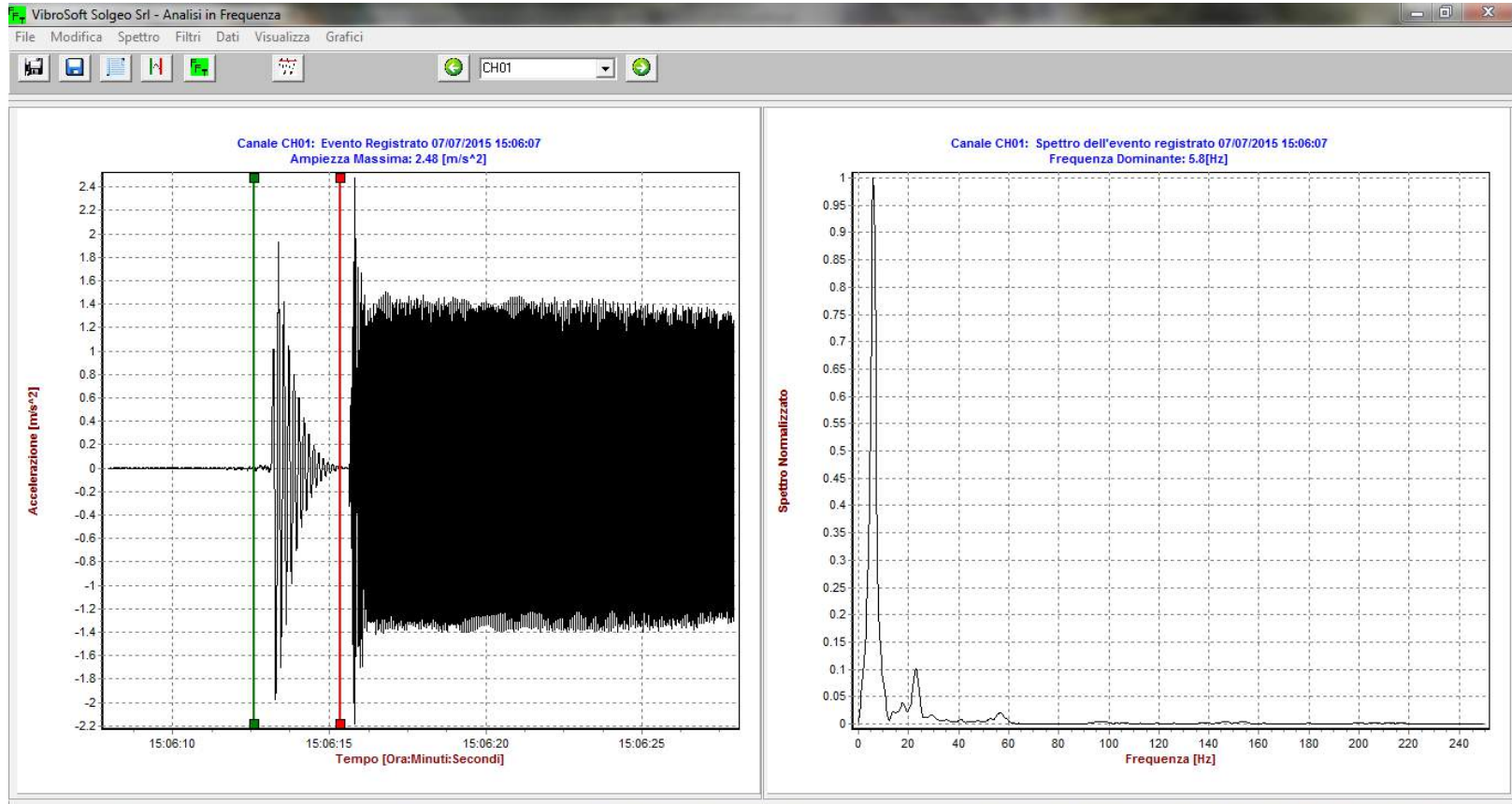


## Configurazione delle prove

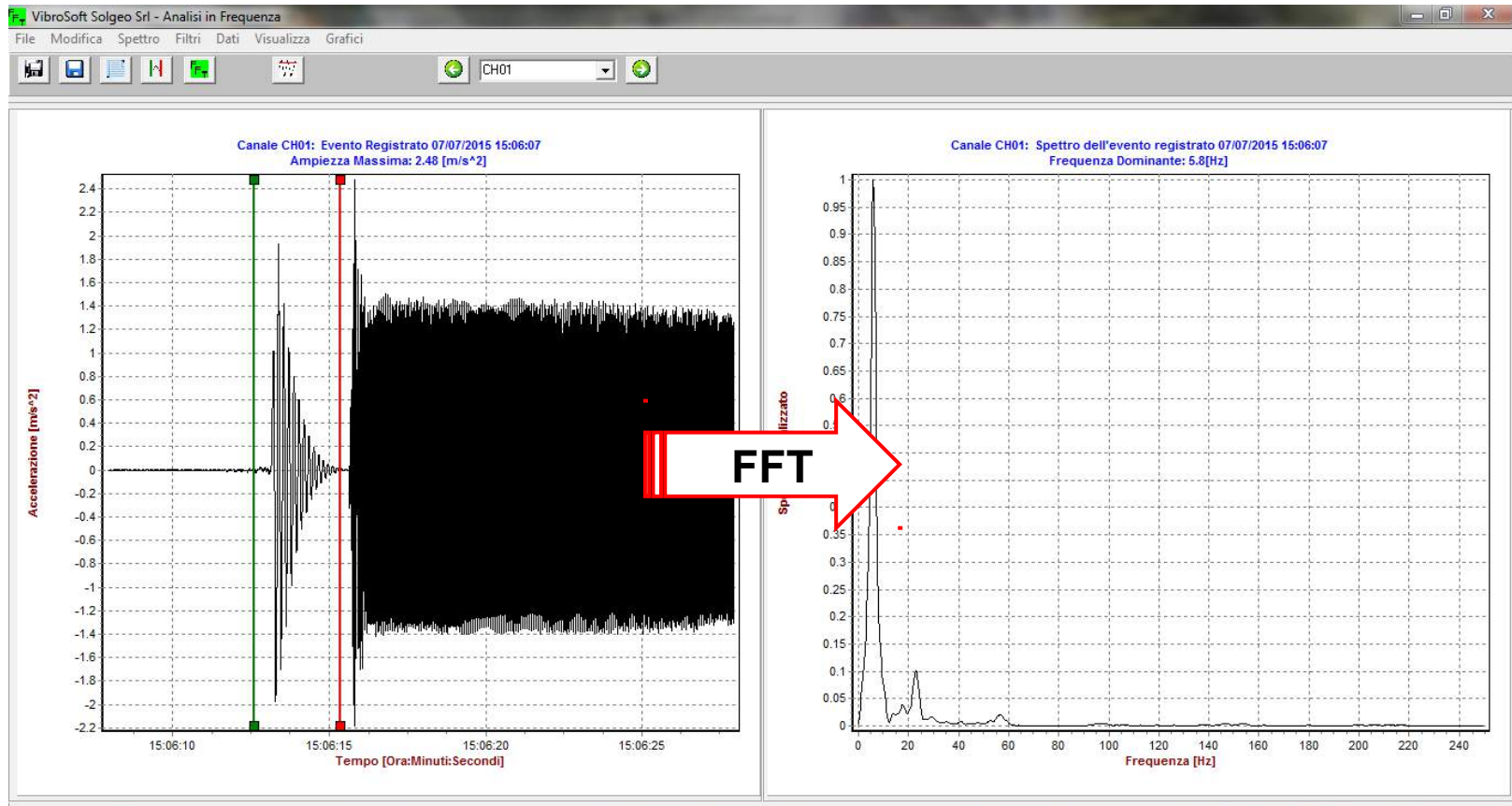
### CASO 2: Trave a mensola



## Identificazione delle frequenze sperimentali

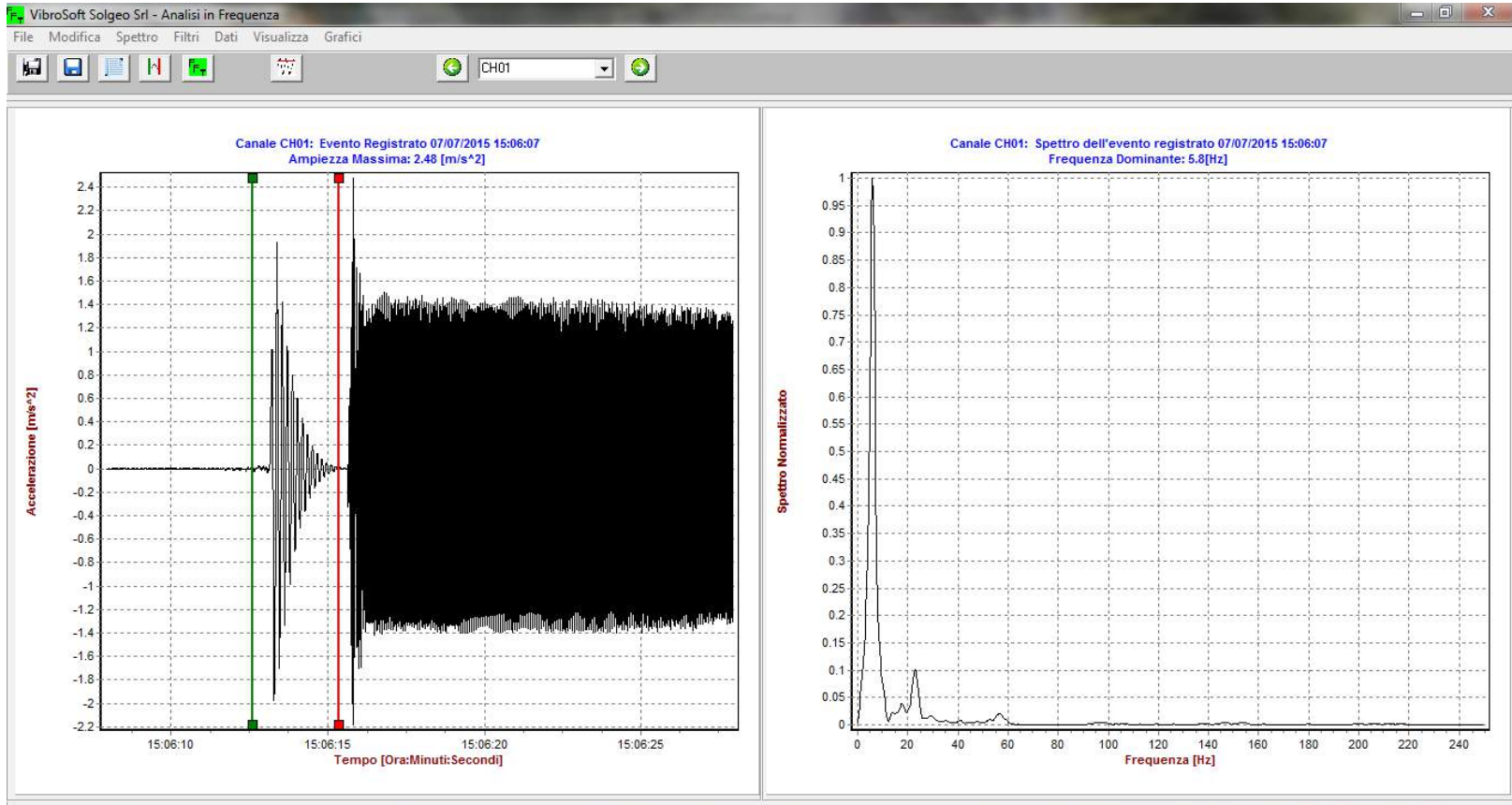


## Identificazione delle frequenze sperimentali



# Identificazione delle frequenze sperimentali

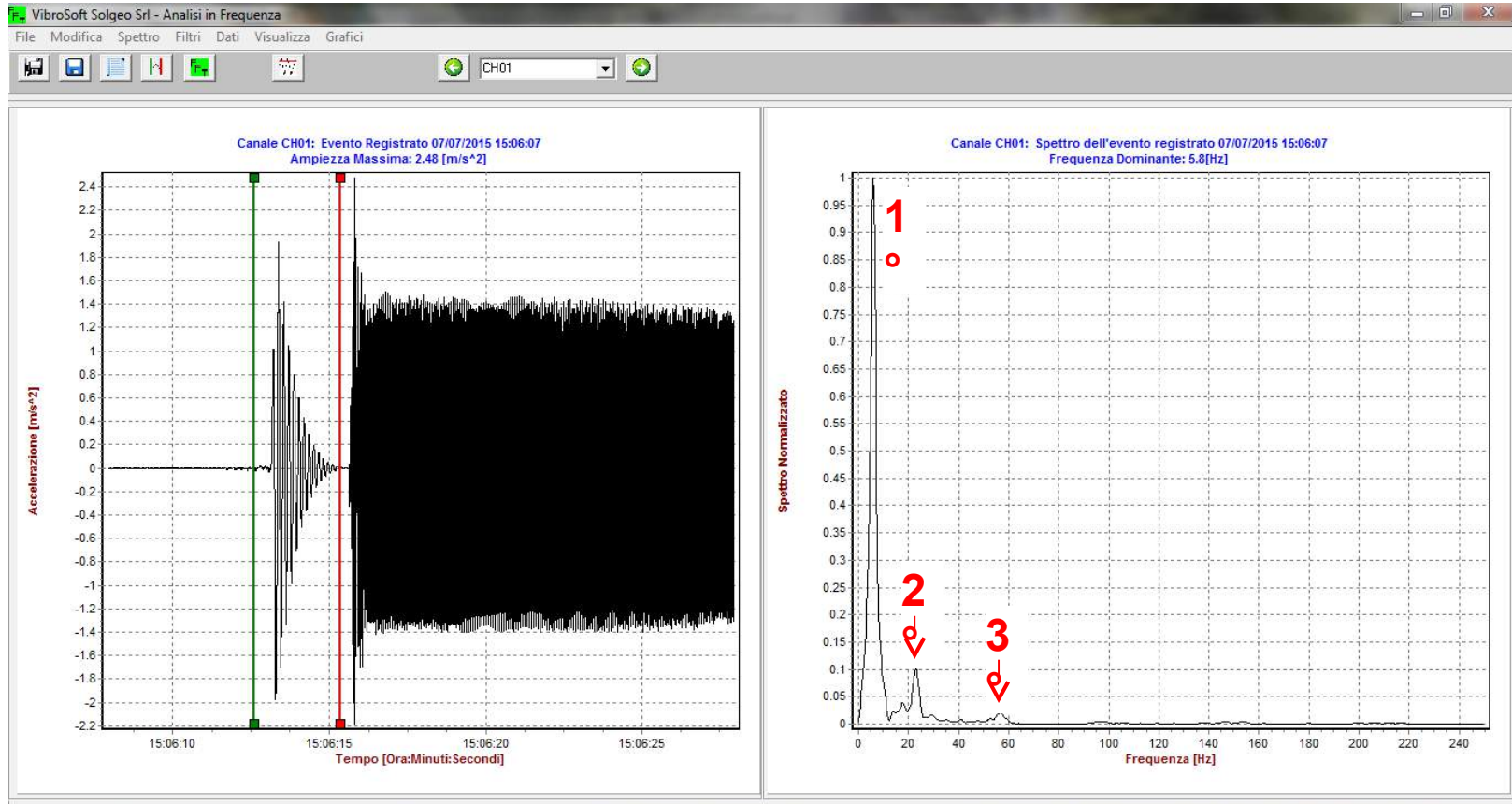
## CASO 1: Trave semplicemente appoggiata





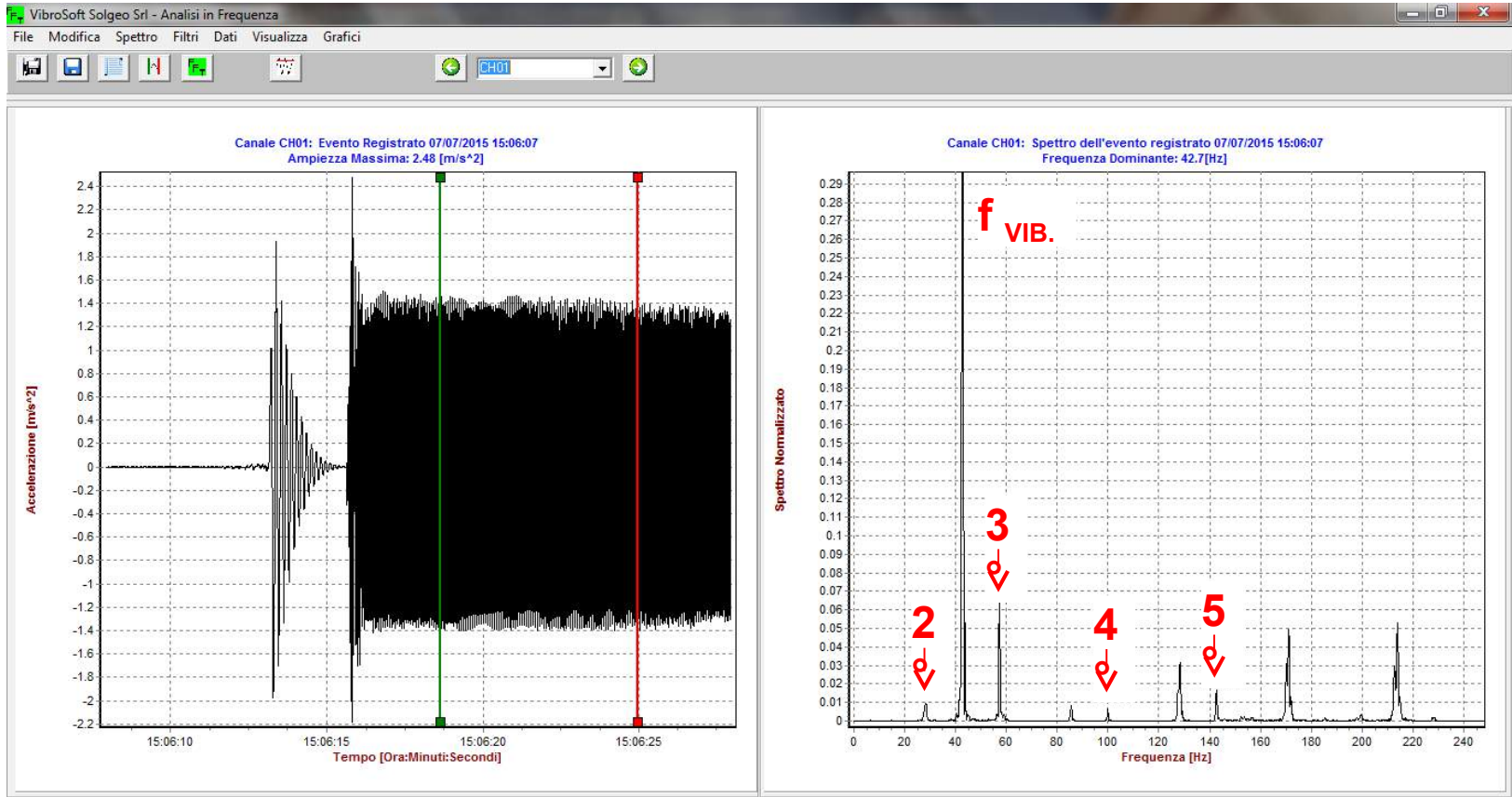
# Identificazione delle frequenze sperimentali

## CASO 1: Trave semplicemente appoggiata



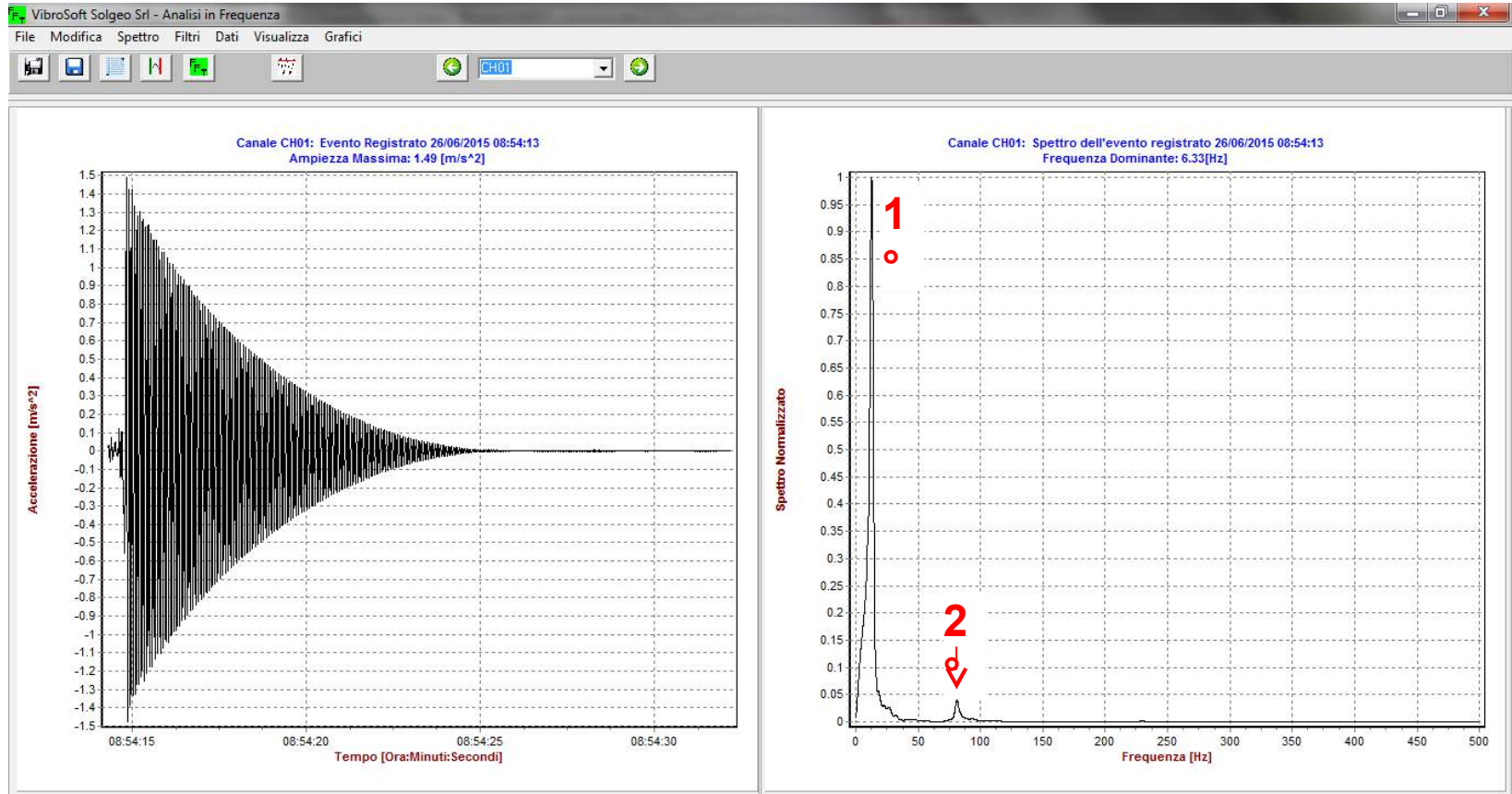
## Identificazione delle frequenze sperimentali

### CASO 1: Trave semplicemente appoggiata



# Identificazione delle frequenze sperimentali

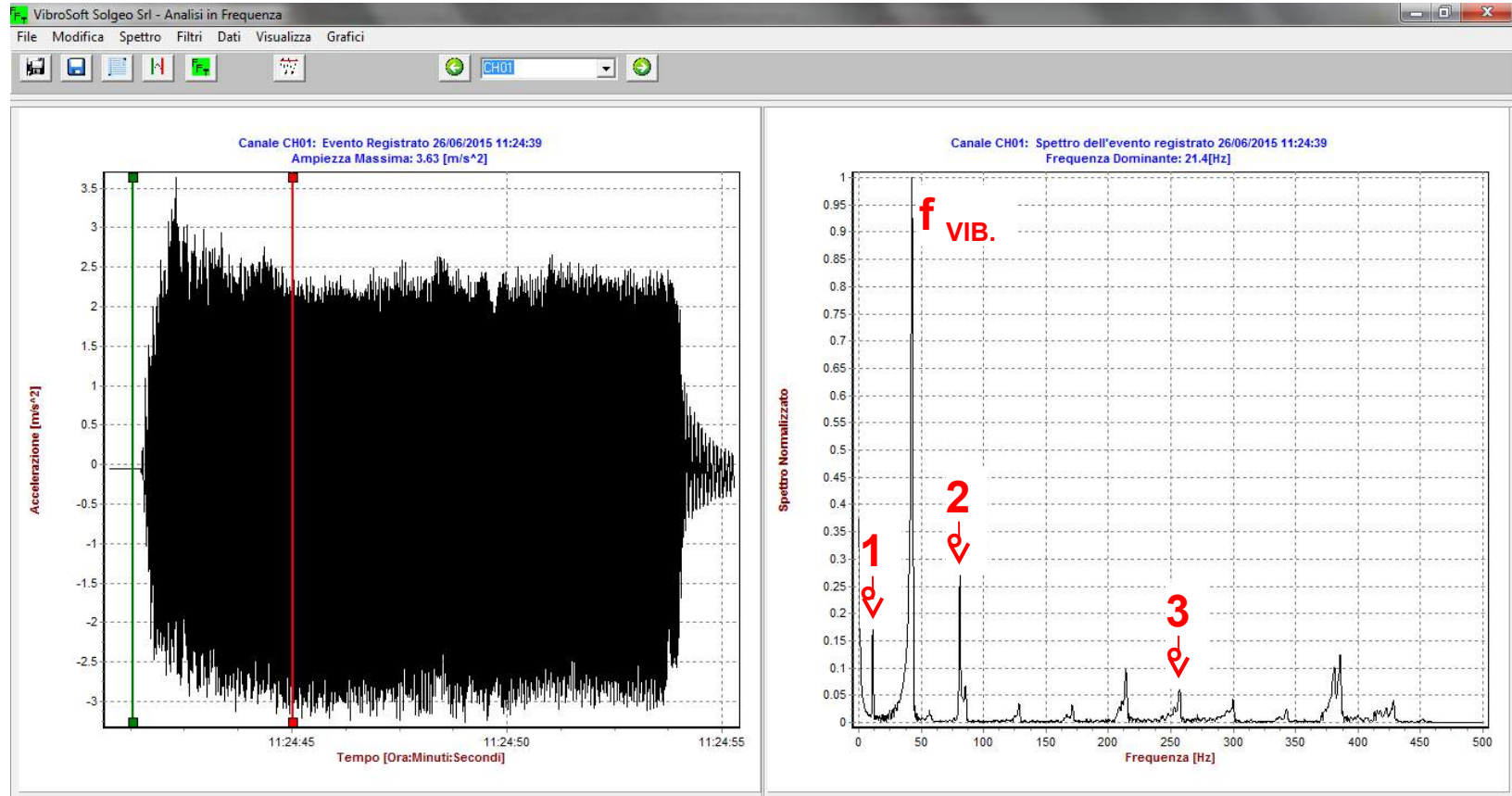
## CASO 2: Trave a mensola





# Identificazione delle frequenze sperimentali

## CASO 2: Trave a mensola



## Risultati delle prove dinamiche

### CASO 1: Trave semplicemente appoggiata

<i>Modo</i>	<b>Lecture sperimentali [Hz]</b>					
	<i>Prova 1</i>	<i>Prova 2</i>	<i>Prova 3</i>	<i>Prova 4</i>	<i>Prova 5</i>	<i>Prova 6</i>
1	5.99	6.09	6.00	6.05	5.97	5.97
2	23.00	23.35	23.35	22.98	23.36	23.24
3	57.20	57.32	58.05	57.20	58.10	57.52
4	100.00	100.38	99.99	100.20	100.30	99.95
5	142.80	143.10	142.90	142.82	142.91	143.18

## Risultati delle prove dinamiche

### CASO 1: Trave semplicemente appoggiata

<b>Modo</b>	<b><math>f_{i, MEDIA}</math> [Hz]</b>	<b>SD [Hz]</b>
1	6.00	0.03
2	23.23	0.16
3	57.52	0.38
4	100.12	0.18
5	142.93	0.12

## Risultati delle prove dinamiche

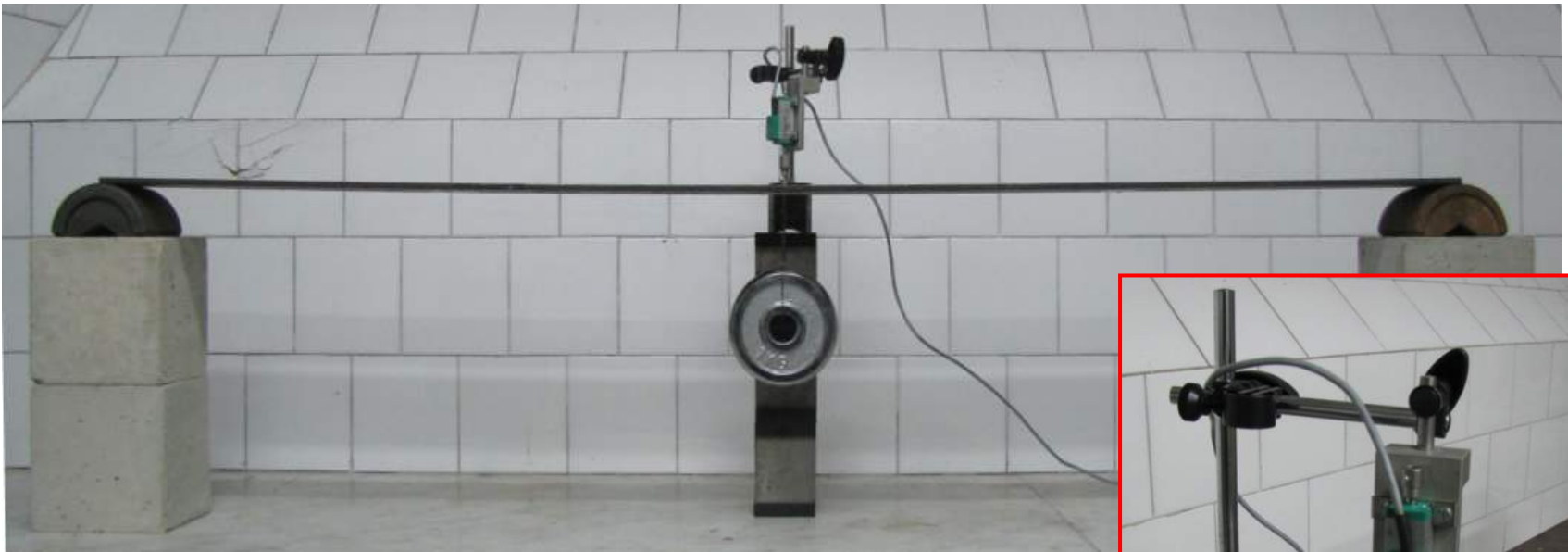
### CASO 2: Trave a mensola

Lecture sperimentali [Hz]						
<i>Modo</i>	<i>Prova 1</i>	<i>Prova 2</i>	<i>Prova 3</i>	<i>Prova 4</i>	<i>Prova 5</i>	<i>Prova 6</i>
1	11.70	11.37	11.32	11.25	11.25	11.70
2	86.71	86.66	86.67	86.68	86.69	86.66
3	256.80	257.65	257.32	257.68	257.29	257.95

<i>Modo</i>	$f_{i, MEDIA}$ [Hz]	<i>SD</i> [Hz]
1	11.41	0.17
2	86.68	0.01
3	257.26	0.35

## Prove statiche

### CASO 1: *Trave semplicemente appoggiata*



## Prove statiche

### CASO 2: Trave a mensola



## Risultati delle prove statiche

### CASO 1: Trave semplicemente appoggiata

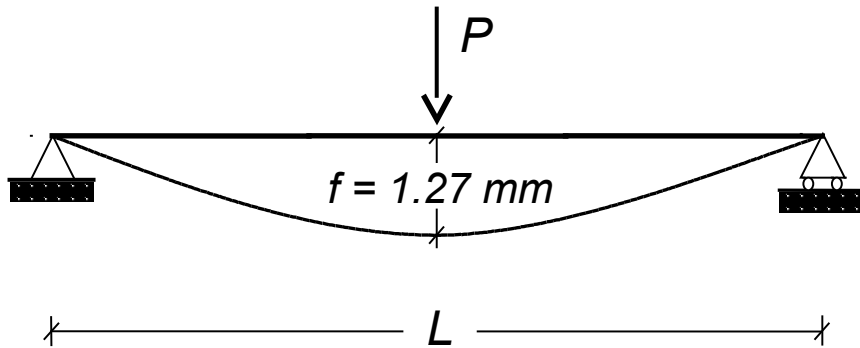
<b><i>Prove</i></b>	<b><i>f [mm]</i></b>	<b><i>f<sub>media</sub> [mm]</i></b>
1	1.27	1.27
2	1.26	
3	1.28	

### CASO 2: Trave a mensola

<b><i>Prove</i></b>	<b><i>f [mm]</i></b>	<b><i>f<sub>media</sub> [mm]</i></b>
1	0.52	0.52
2	0.52	
3	0.53	

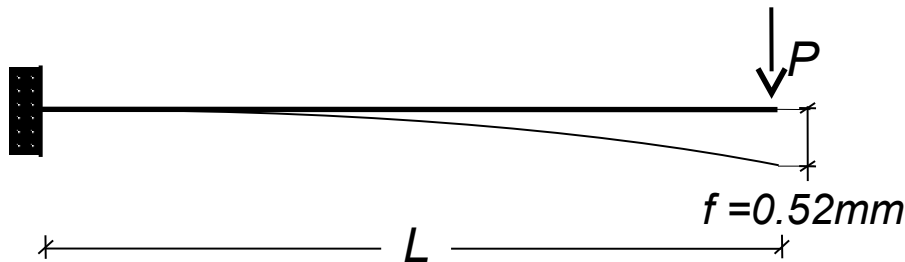
## Risultati delle prove statiche

### CASO 1: Trave semplicemente appoggiata



$$f_{L/2} = \frac{PL^3}{48EJ} \rightarrow E = \frac{PL^3}{48f_{L/2}J} = 203.433 \text{ GPa}$$

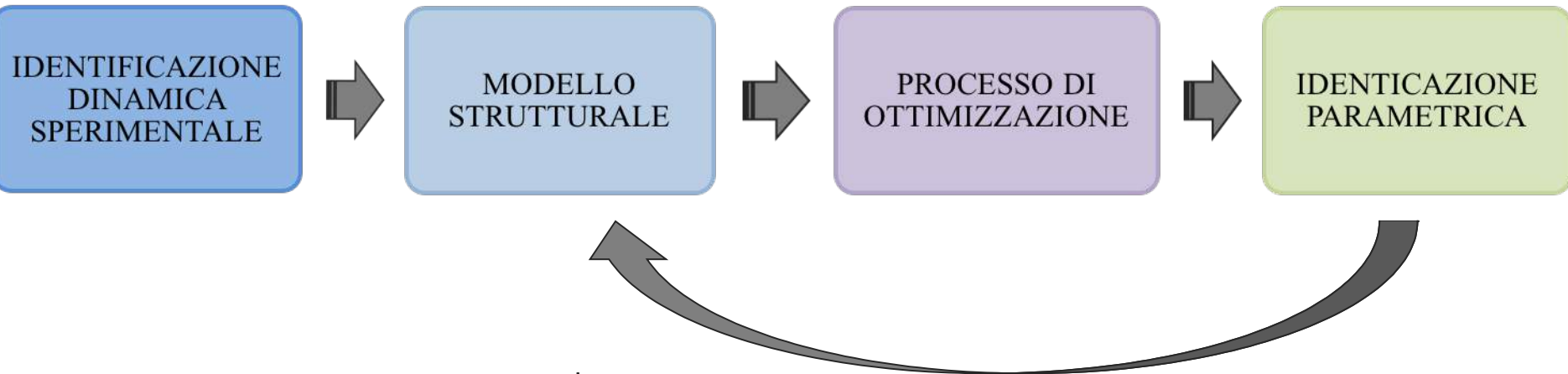
### CASO 2: Trave a mensola



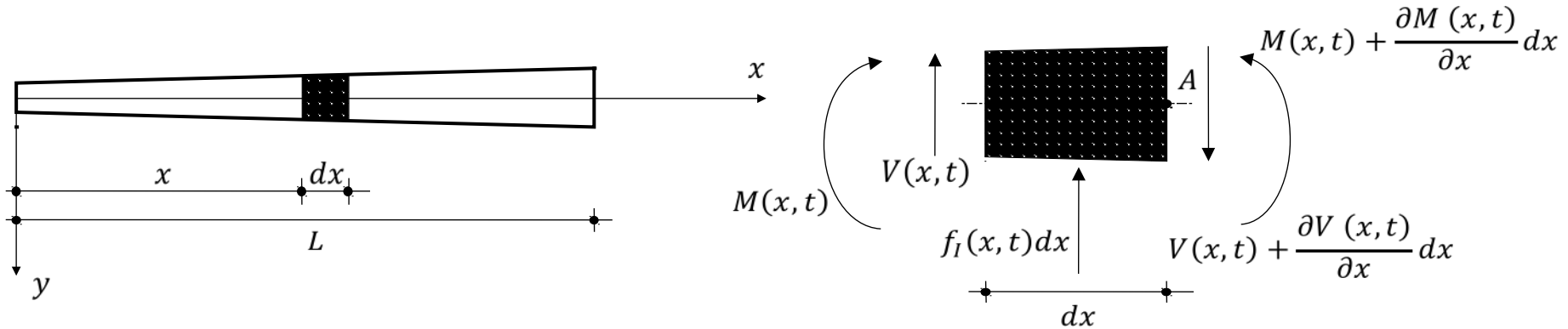
$$f_L = \frac{PL^3}{3EJ} \rightarrow E = \frac{PL^3}{3f_LJ} = 203.000 \text{ GPa}$$



## Model Updating



## Trave di Eulero-Bernoulli



**Equazione che governa le oscillazioni libere**

$$w^{IV}(x, t) + \frac{\rho}{EJ} \ddot{w}(x, t) = 0$$

**Ipotesi**

Validità del principio di conservazione delle sezioni piane

Legame momento-curvatura  $M = EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Elevati valori di snellezza

# Processo di ottimizzazione

## Processo di ottimizzazione

$$C_i = \sqrt{\sum_k \left( \frac{\omega_{an}(k) - \omega_{sper}(k)}{\omega_{sper}(k)} \right)^2}$$

## Processo di ottimizzazione

$$C_i = \sqrt{\sum_k \left( \frac{\omega_{an}(k) - \omega_{sper}(k)}{\omega_{sper}(k)} \right)^2}$$

$i$  = contatore dei parametri incogniti da ottimizzare

$k$  = numero delle frequenze su cui effettuare il processo di ottimizzazione

## Algoritmi utilizzati

### **CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*

Algoritmo 1: ricerca il valore del Modulo Elastico  $E$

### **CASO 2:** *Trave a mensola*

Algoritmo 2: basato sul Simulated Annealing che ricerca il valore del Modulo Elastico  $E$  e delle rigidezze  $k_1$  e  $k_2$  del vincolo supposto cedevole

# Algoritmo 1

**CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*

## Algoritmo 1

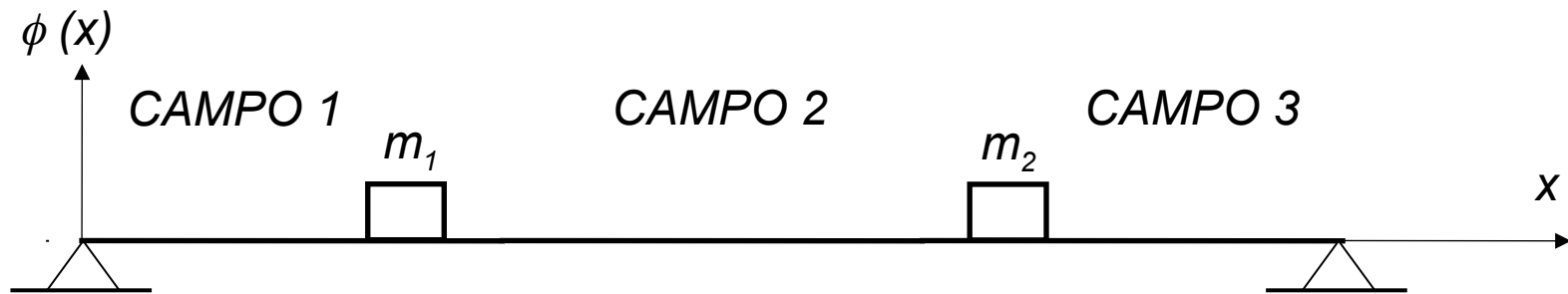
### **CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*

1. definizione delle caratteristiche geometriche, del materiale di cui è costituita la struttura e delle  $k$  frequenze angolari rilevate sperimentalmente  $\omega_{sper}$ ;
2. definizione del campo e del passo di variazione del parametro da ottimizzare;
3. definizione del contatore  $i$  che va da 1 alla lunghezza del parametro incognito secondo il passo definito al punto 2;
4. calcolo delle  $k$  frequenze analitiche;
5. calcolo dell'errore  $E_r(i)$ ;
6. incrementa di uno il contatore  $i$  e torna al punto 4;
7. termina il ciclo quanto  $i$  coincide con il valore massimo del campo del parametro da ottimizzare;
8. trova il minimo degli errori  $E_r$ ;



## Trave di Eulero-Bernoulli con masse concentrate

**CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*



Equazione che governa le oscillazioni libere

$$w^{IV}(x, t) + \frac{\rho}{EJ} \ddot{w}(x, t) = 0$$

Metodo della separazione di variabili

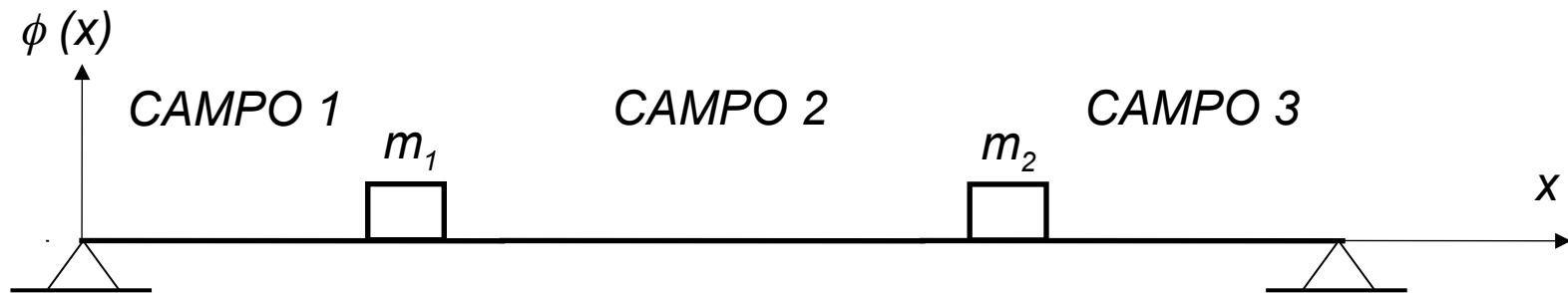
$$w(x, t) = \phi(x) Y(t)$$

$$\phi(x) = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax + A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax$$

$$Y(t) = e^{i\omega t}$$

## Trave di Eulero-Bernoulli con masse concentrate

**CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*



Campo 1

$$\phi_1(x) = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax + A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax$$

Campo 2

$$\phi_2(x) = A_5 \cos ax + A_6 \sin ax + A_7 \cosh ax + A_8 \sinh ax$$

Campo 3

$$\phi_3(x) = A_9 \cos ax + A_{10} \sin ax + A_{11} \cosh ax + A_{12} \sinh ax$$

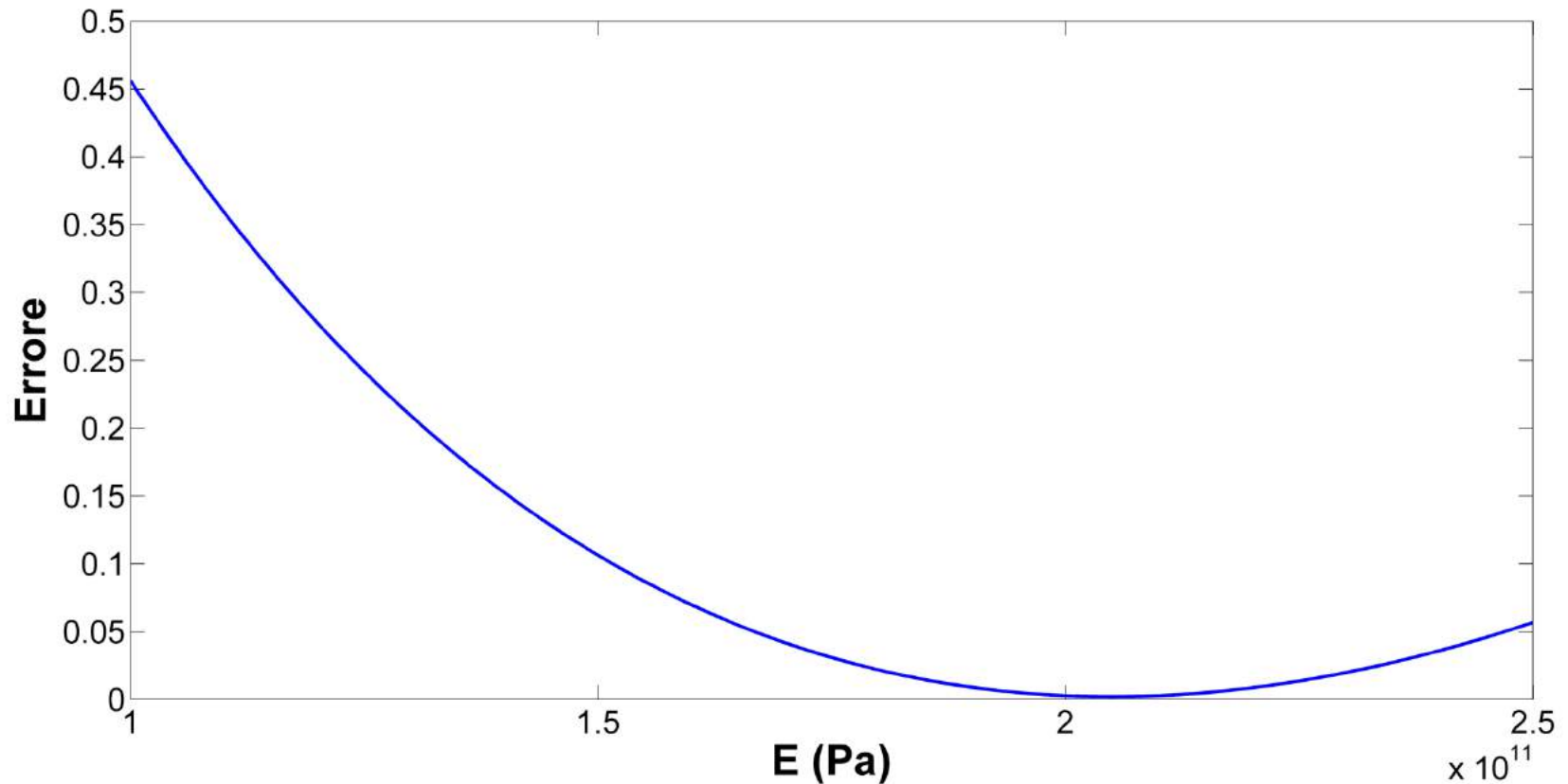
## Esempi applicativi

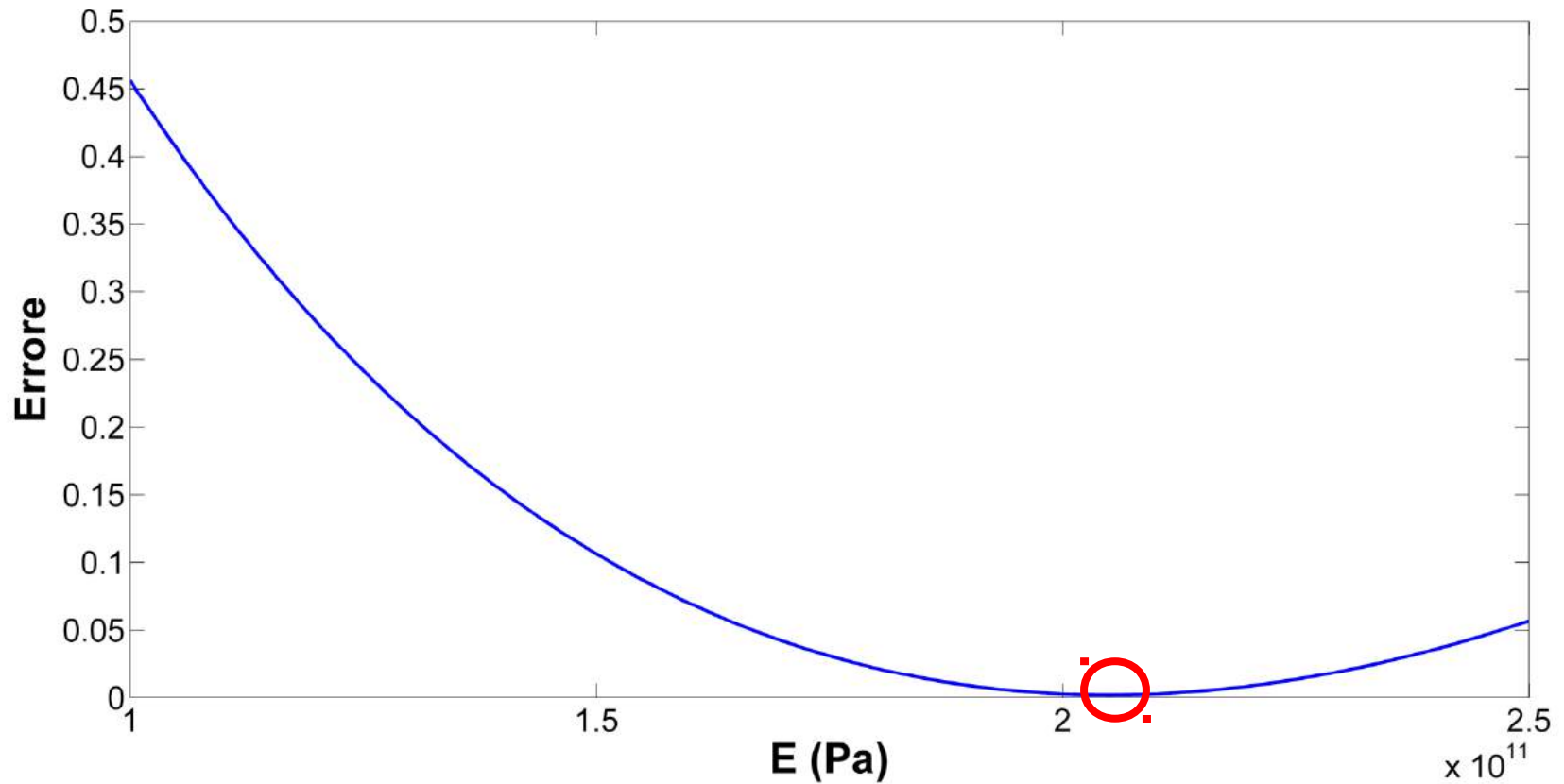
Equazione di frequenza per trave di EB semplicemente appoggiata con masse concentrate:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{EI} 4\rho^2 \omega^2 \left( (-1-i) m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L+(1+i)L_1)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L+(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + i m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L+(1-i)(L_1-L_2))\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L+(1-i)(L_1-L_2))\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + i m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L+(1+i)(L_1-L_2))\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L+(1+i)(L_1-L_2))\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + \right. \\
 & + m_2 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L-(1-i)(L_1+L_2))\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L-(1-i)(L_1+L_2))\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] - 2m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L-L_1-L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L-L_1-L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + 2m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L-L_1-L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L-L_1-L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + \\
 & + 2m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L+L_2+L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L+L_2+L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] - 2m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L+L_2-L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L+L_2-L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] - (1+i) m_2 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + \\
 & + m_2 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L-(1+i)L_1-(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L-(1+i)L_1-(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] - (1-i) m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L+(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \cosh \left[ \frac{(L+(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + 2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cosh \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \left( m_1 m_2 \sqrt{\omega} \cos \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + 2(m_1+m_2) \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sin \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \right) - \\
 & - (1-i) \cosh \left[ \frac{(L-(1-i)L_1)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \left( m_1 m_2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \omega \cos \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + 2 m_1 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \sin \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \right) + (2+2i) m_1 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cosh \left[ \frac{(L+(1+i)L_1)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sin \left[ \frac{(L+(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] - (2-2i) m_2 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cosh \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sin \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + \\
 & + (2-2i) m_2 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cosh \left[ \frac{(L+(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sin \left[ \frac{(L+(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + 4 m_2 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cos \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sinh \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + 4 m_2 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cos \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sinh \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + 16 EI \sin \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sinh \left[ \frac{L\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] - \\
 & - (2-2i) m_1 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cos \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sinh \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + (2+2i) m_1 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cos \left[ \frac{(L+(1+i)L_1)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sinh \left[ \frac{(L+(1+i)L_1)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] - (2-2i) m_2 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cos \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sinh \left[ \frac{(L-(1-i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] + \\
 & + (2+2i) m_2 \left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \rho \sqrt{\omega} \cos \left[ \frac{(L+(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \sinh \left[ \frac{(L+(1+i)L_2)\sqrt{\omega}}{\left(\frac{EI}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}} \right] \Big)
 \end{aligned}$$

## Risultati

### **CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*

**CASO 1: Trave semplicemente appoggiata**

**CASO 1: Trave semplicemente appoggiata**

## Risultati

**CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*

3 Modi

**E = 210.000 GPa**

5 Modi

**E = 205.000 GPa**

## Risultati

**CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*

3 Modi

**E = 210.000 GPa**

**Er = 3.26%**

5 Modi

**E = 205.000 GPa**

**Er = 0.76%**

**E<sub>STAT</sub> = 203.433 GPa**



## Risultati

**CASO 1: Trave semplicemente appoggiata**

3 Modi

**E = 210.000 GPa****Er = 3.26%**

<i>Modo</i>	$f_{sper}$ [Hz]	$f_{an}$ [Hz]	<i>Er</i> %
1	6.00	5.98	-0.36
2	23.23	22.76	-2.05
3	57.52	58.85	2.31

5 Modi

**E = 205.000 GPa****E<sub>STAT</sub> = 203.433 GPa****Er = 0.76%**

<i>Modo</i>	$f_{sper}$ [Hz]	$f_{an}$ [Hz]	<i>Er</i> %
1	6.00	5.91	-1.55
2	23.23	22.48	-3.22
3	57.52	58.15	1.08
4	100.12	102.48	2.36
5	142.93	144.71	1.24

## Risultati

**CASO 1: Trave semplicemente appoggiata**

3 Modi

**E = 210.000 GPa****Er = 3.26%**

<i>Modo</i>	$f_{sper}$ [Hz]	$f_{an}$ [Hz]	<i>Er</i> %
1	6.00	5.98	-0.36
2	23.23	22.76	-2.05
3	57.52	58.85	2.31

5 Modi

**E = 205.000 GPa****E<sub>STAT</sub> = 203.433 GPa****Er = 0.76%**

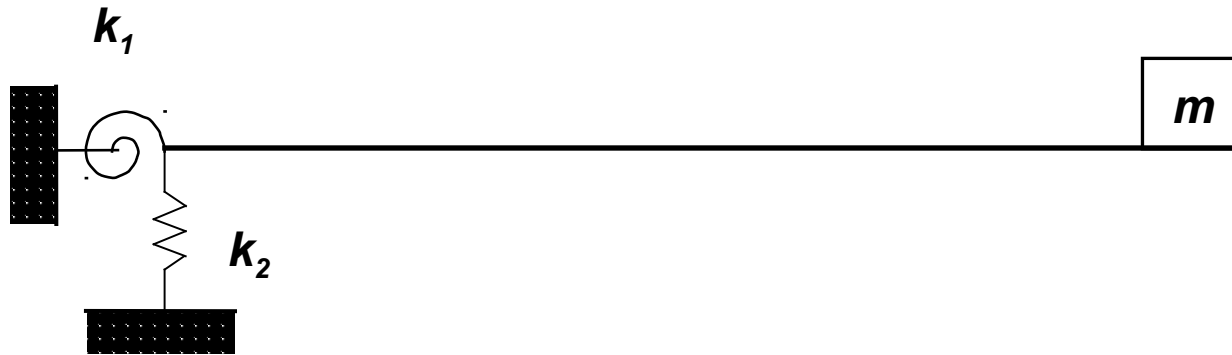
<i>Modo</i>	$f_{sper}$ [Hz]	$f_{an}$ [Hz]	<i>Er</i> %
1	6.00	5.91	-1.55
2	23.23	22.48	-3.22
3	57.52	58.15	1.08
4	100.12	102.48	2.36
5	142.93	144.71	1.24

## Algoritmo 2-Simulated Annealing

**CASO 2:** *Trave a mensola*

## Algoritmo 2-Simulated Annealing

**CASO 2:** *Trave a mensola*



$$\mathbf{E} = ?$$

$$k_1 = ?$$

$$k_2 = ?$$

## Algoritmo 2-Simulated Annealing

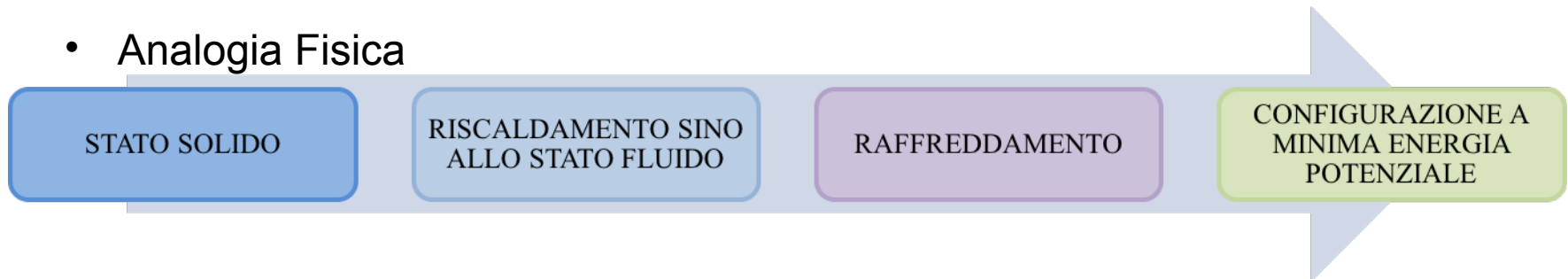
### **CASO 2:** *Trave a mensola*

- algoritmo di ricerca della soluzione ottimale con un procedimento iterativo e stocastico.

## Algoritmo 2-Simulated Annealing

### CASO 2: *Trave a mensola*

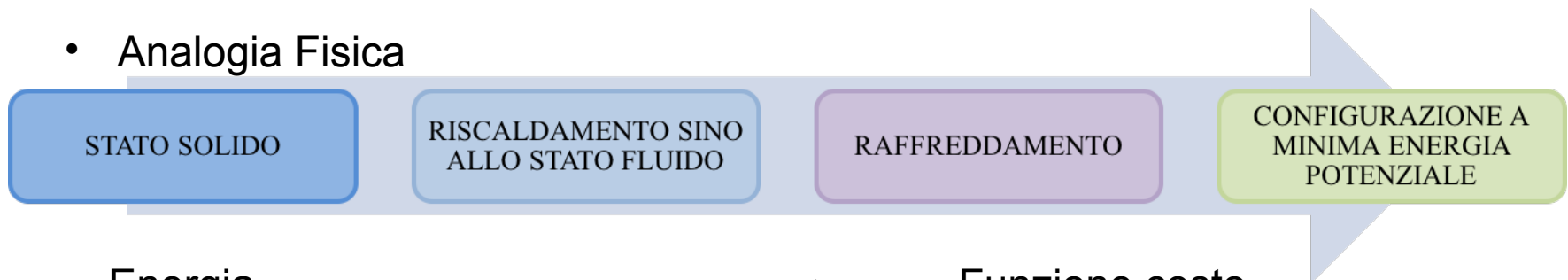
- algoritmo di ricerca della soluzione ottimale con un procedimento iterativo e stocastico.
- Analogia Fisica



## Algoritmo 2-Simulated Annealing

### CASO 2: Trave a mensola

- algoritmo di ricerca della soluzione ottimale con un procedimento iterativo e stocastico.
- Analogia Fisica



Energia

→

Funzione costo

Configurazione delle particelle

→

Variabili del problema

Temperatura

→

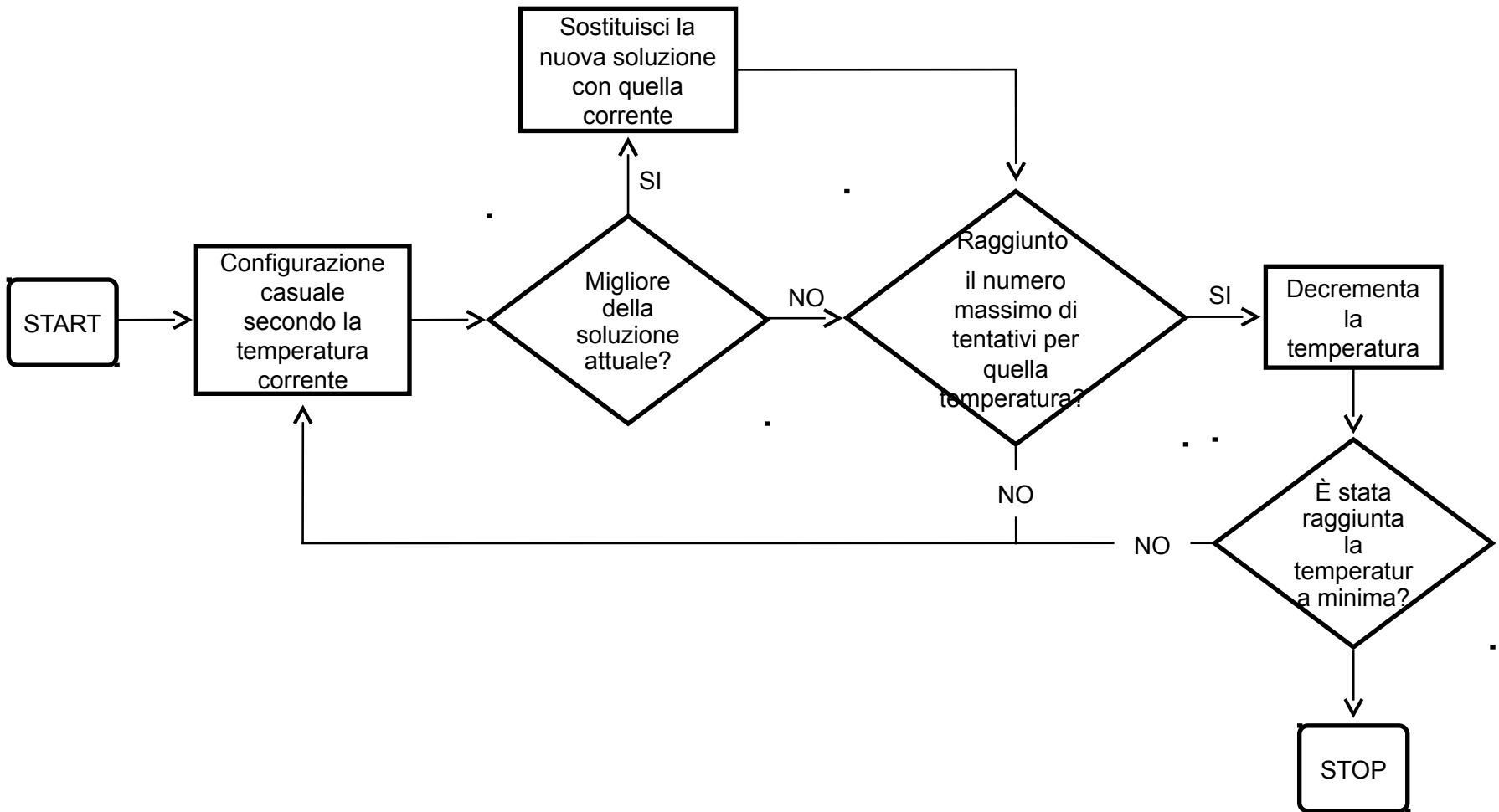
Parametro di controllo

Ricerca configurazione minima energia

→

Ricerca delle variabili che minimizzano la funzione costo

## Algoritmo 2-Simulated Annealing



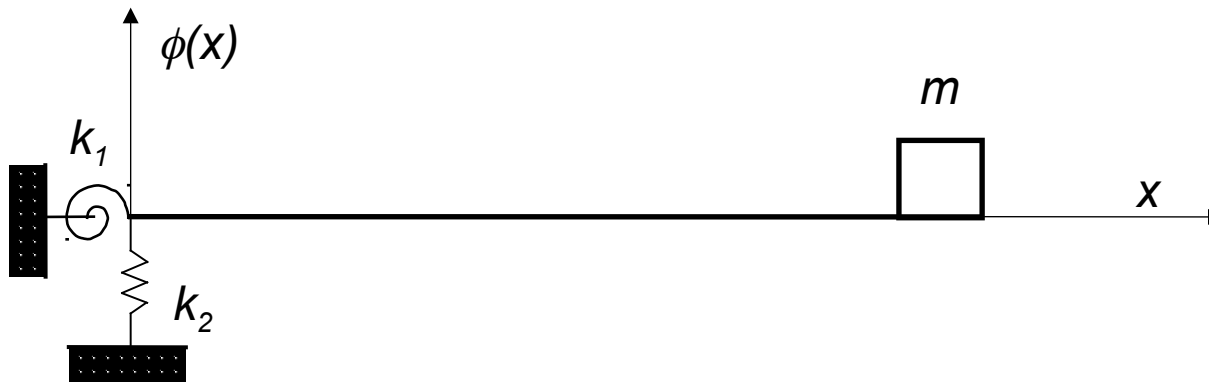


# Eulero-Bernoulli con masse e vincolo cedevole

**CASO 2:** *Trave a mensola*

## Eulero-Bernoulli con masse e vincolo cedevole

**CASO 2:** *Trave a mensola*



$$\phi(x) = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax + A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax$$

## Esempi applicativi

Equazione di frequenza per mensola incastrata di EB con massa concentrata:

$$\begin{aligned}
 & \left( 2\omega \sqrt{\frac{EJ}{\rho}} \left( EJ k_1 k_2 \left( \frac{\omega}{\sqrt{EJ}} \right)^{\frac{3}{2}} - E^3 J^3 \left( \frac{\omega}{\sqrt{EJ}} \right)^{\frac{7}{2}} + \cosh \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) \left( EJ \left( \frac{\omega}{\sqrt{EJ}} \right)^{\frac{3}{2}} (k_1 (k_2 - 2m\omega^2) + EJ \omega^2 \rho) \cos \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) + \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left. + \omega^2 \left( -k_1 k_2 m + EJ \left( k_2 - m\omega^2 - \frac{k_1 \omega}{\sqrt{EJ}} \right) \rho \right) \sin \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) \right) + \omega^2 \left( \left( EJ (-k_2 + m\omega^2) \rho + k_1 \left( k_2 m - \omega^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho}} \right) \right) \cos \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 EJ k_2 m \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \sin \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) \right) \right) \left( k_1 k_2 m \omega^2 \cos \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) - 2 EJ k_2 \omega^2 \rho \cos \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) + \right. \\
 & + EJ m \omega^4 \rho \cos \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) + m \omega^2 (-k_1 k_2 + EJ \omega^2 \rho) \cosh \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) + 2 EJ k_2 m \omega^2 \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \sin \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) + EJ k_1 k_2 \left( \frac{\omega}{\sqrt{EJ}} \right)^{\frac{3}{2}} \sin \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) + \\
 & \left. + E^3 J^3 \left( \frac{\omega}{\sqrt{EJ}} \right)^{\frac{7}{2}} \sin \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) + EJ \left( \frac{\omega}{\sqrt{EJ}} \right)^{\frac{3}{2}} (-k_1 k_2 + EJ \omega^2 \rho) \sinh \left( L \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{EJ}}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

## Risultati

### **CASO 2: *Trave a mensola***

$$\mathbf{E = 201.000\ GPa}$$

$$\mathbf{k_1 = 6.89 \cdot 10^{15}\ Nm}$$

$$\mathbf{k_2 = 9.86 \cdot 10^{19}\ N/m}$$

## Risultati

### CASO 2: Trave a mensola

$$E = 201.000 \text{ GPa}$$

$$k_1 = 6.89 \cdot 10^{15} \text{ Nm}$$

$$k_2 = 9.86 \cdot 10^{19} \text{ N/m}$$

$$f_{estremo} = P \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \frac{L^2}{2} - \frac{1}{EJ} \frac{L^3}{3} \right)$$

## Risultati

**CASO 2: Trave a mensola**

$$E = 201.000 \text{ GPa}$$

$$k_1 = 6.89 \cdot 10^{15} \text{ Nm}$$

$$k_2 = 9.86 \cdot 10^{19} \text{ N/m}$$

$$E_{STAT} = 203.001 \text{ GPa}$$

$$Er = 0.99\%$$

$$f_{estremo} = P \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \frac{L^2}{2} - \frac{1}{EJ} \frac{L^3}{3} \right)$$



$$E_{STAT} = \frac{\frac{PL^3}{3}}{w_{(0)} - \frac{P}{k_2} + \frac{P}{k_1} \frac{L^2}{2}}$$



## Risultati

## CASO 2: Trave a mensola

$$E = 201.000 \text{ GPa}$$

$$k_1 = 6.89 \cdot 10^{15} \text{ Nm}$$

$$k_2 = 9.86 \cdot 10^{19} \text{ N/m}$$

$$E_{STAT} = 203.001 \text{ GPa}$$

$$Er = 0.99\%$$

Modo	$f_{sper}$ [Hz]	$f_{an}$ [Hz]	Er %
1	11.41	11.62	1.86
2	86.68	85.59	-1.25
3	257.26	255.56	-0.66

$$f_{estremo} = P \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \frac{L^2}{2} - \frac{1}{EJ} \frac{L^3}{3} \right)$$

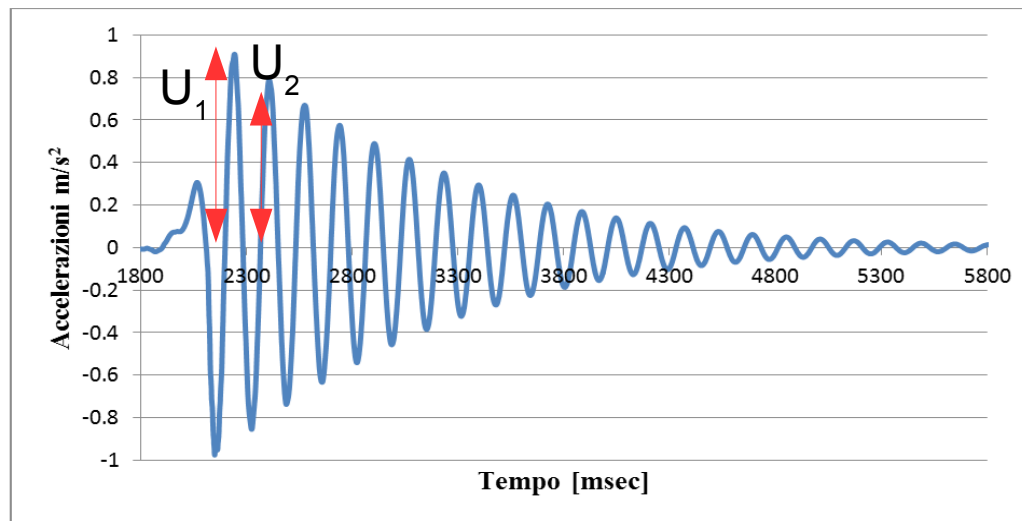


$$E_{STAT} = \frac{\frac{PL^3}{3}}{w_{(0)} - \frac{P}{k_2} + \frac{P}{k_1} \frac{L^2}{2}}$$

## Metodo del decremento logaritmico 1/2

È definito decremento logaritmico: 
$$\delta = \ln \frac{U_n}{U_{n+1}}$$

Tale parametro indica la rapidità con cui si attenua l'ampiezza dell'oscillazione di un sistema in oscillazioni libere dotato di smorzamento





## Metodo del decremento logaritmico 2/2

Decremento logaritmico:  $\delta = \ln \frac{U_n}{U_{n+1}}$

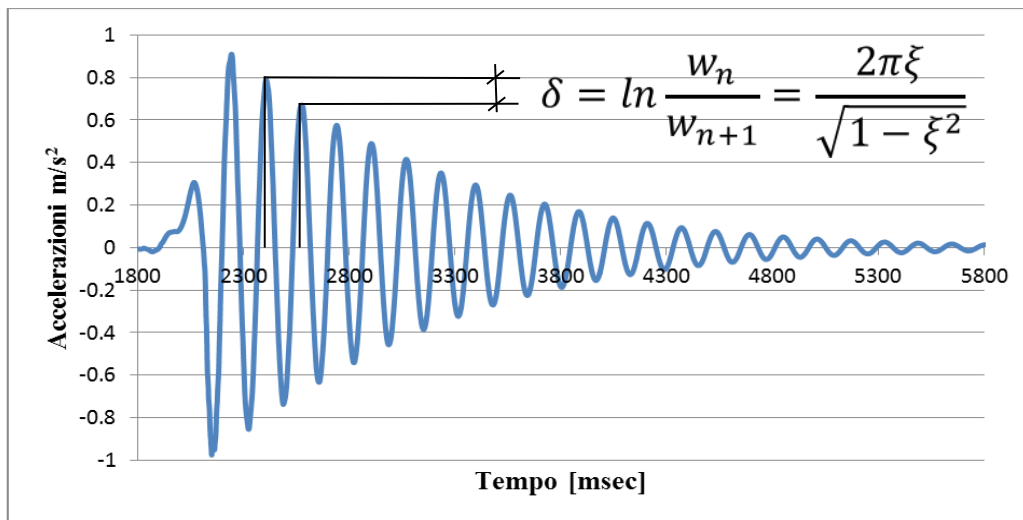
Se la soluzione dell'equazione del moto è  $U_1 = A \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t_1}$

$$U_2 = A \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t_2} = A \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot (t_1 + T_D)}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{-\xi \cdot \omega \cdot [t_1 - (t_1 + T_D)]} = e^{\xi \cdot \omega \cdot T_D}$$

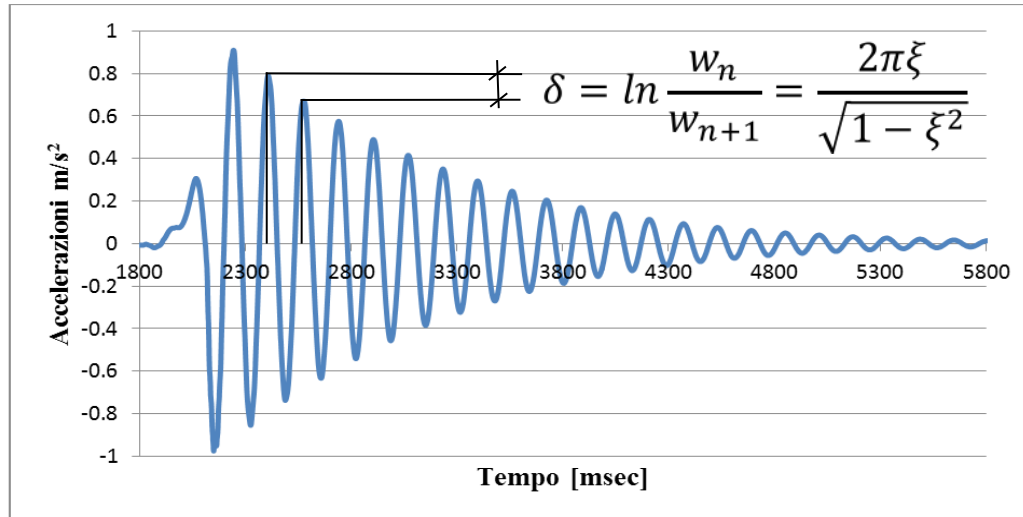
$$\delta = \ln \frac{U_1}{U_2} = \xi \cdot \omega \cdot T_D \quad \xi = \frac{\delta}{2 \cdot \pi} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4 \cdot \pi^2}}$$

## Determinazione del fattore di smorzamento 1/2



$$\xi = \frac{\delta}{2 \cdot \pi} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4 \cdot \pi^2}}$$

## Determinazione del fattore di smorzamento 2/2



$$\xi = \frac{\delta}{2 \cdot \pi} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4 \cdot \pi^2}}$$

**CASO 1:** *Trave semplicemente appoggiata*

$$\xi = 2.41\%$$

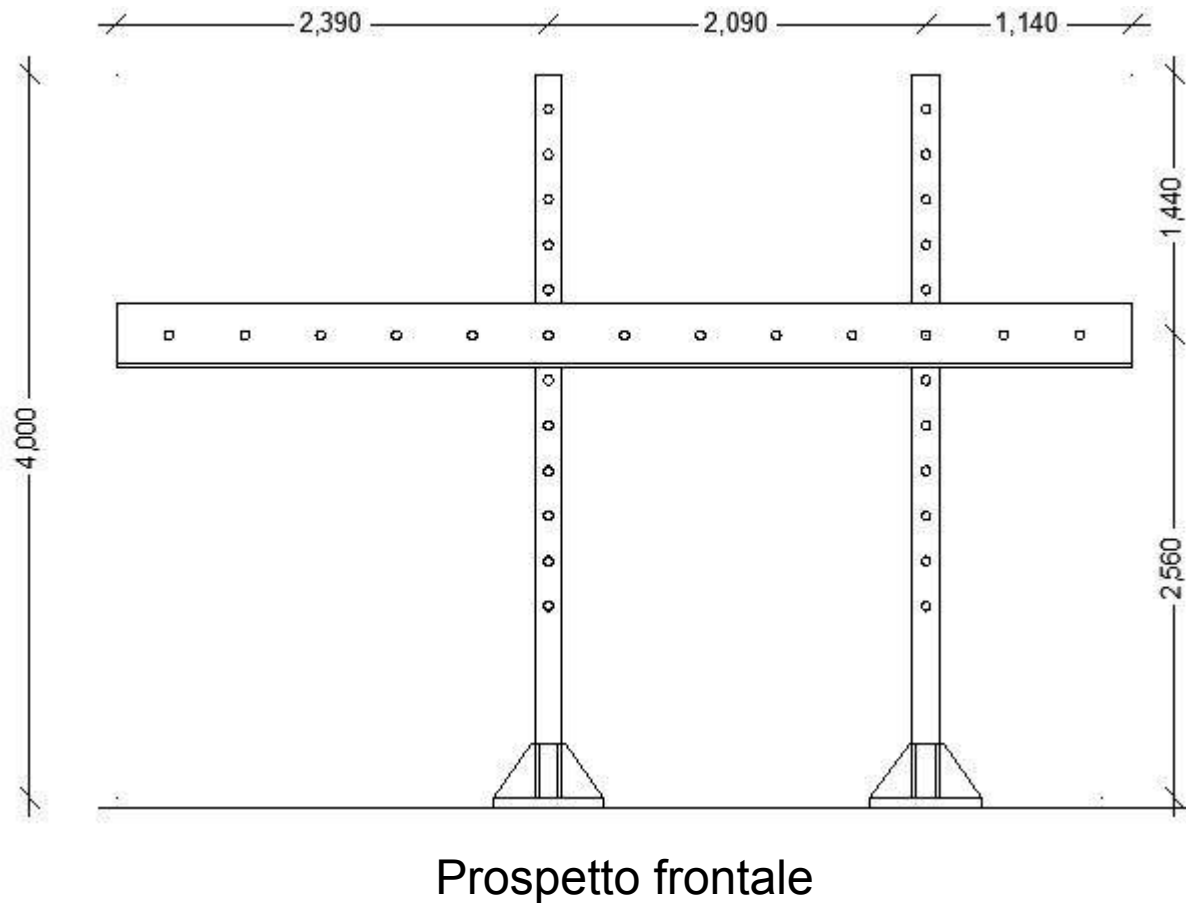
**CASO 2:** *Trave a mensola*

$$\xi = 0.69\%$$

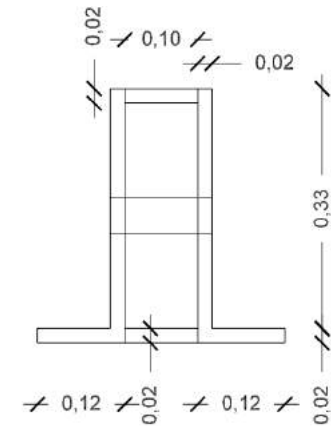
## Caso studio 3: Telaio in acciaio



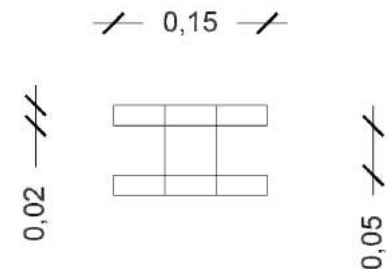
## Caso studio 3: Telaio in acciaio



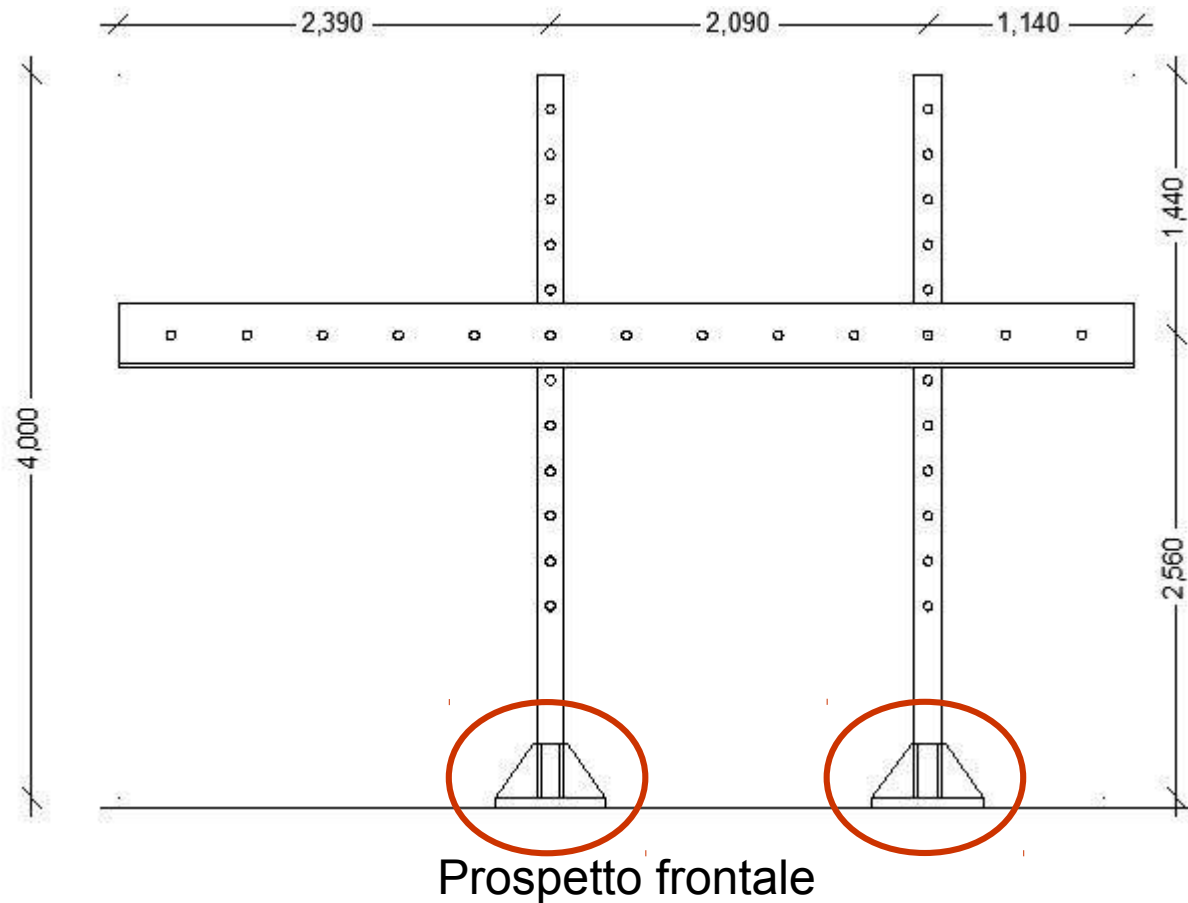
Sezione trave



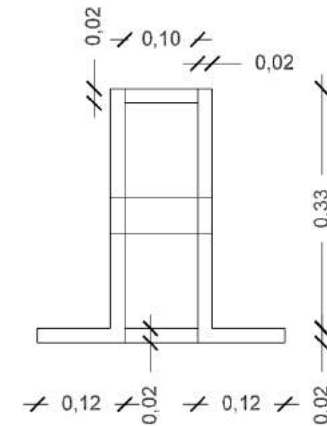
Sezione Pilastro



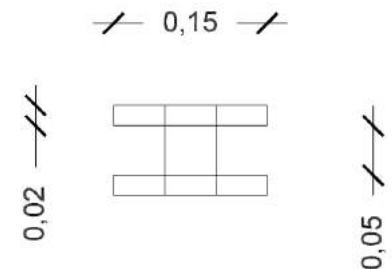
## Caso studio 3: Telaio in acciaio



Sezione trave

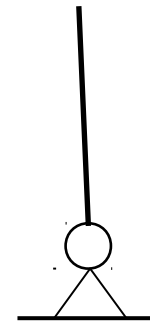


Sezione Pilastro



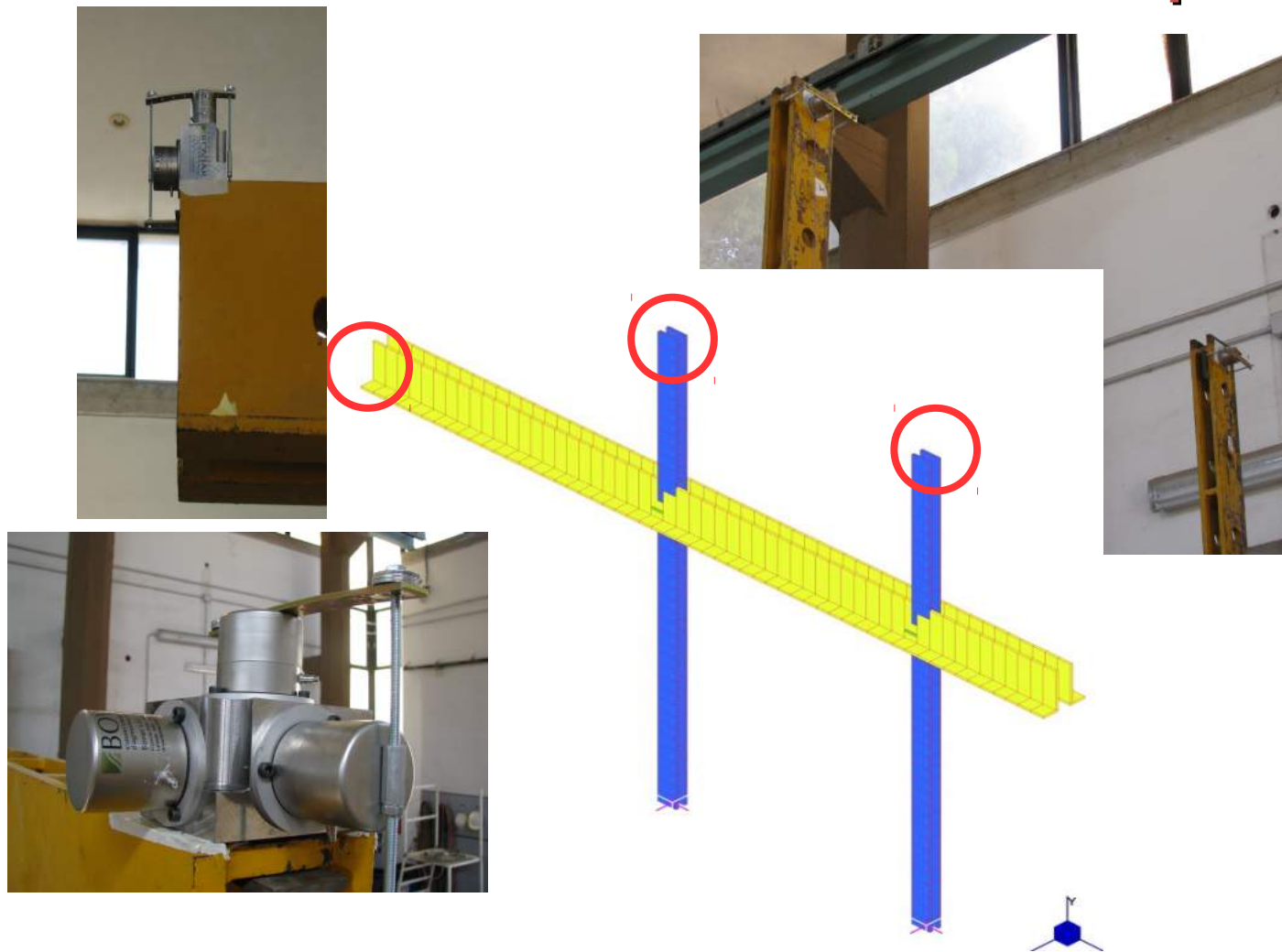
## Caso studio 3: Telaio in acciaio

Quale sarà il grado di incastro fornito dal vincolo dei pilastri?





## Caso studio 3: Analisi modale sperimentale





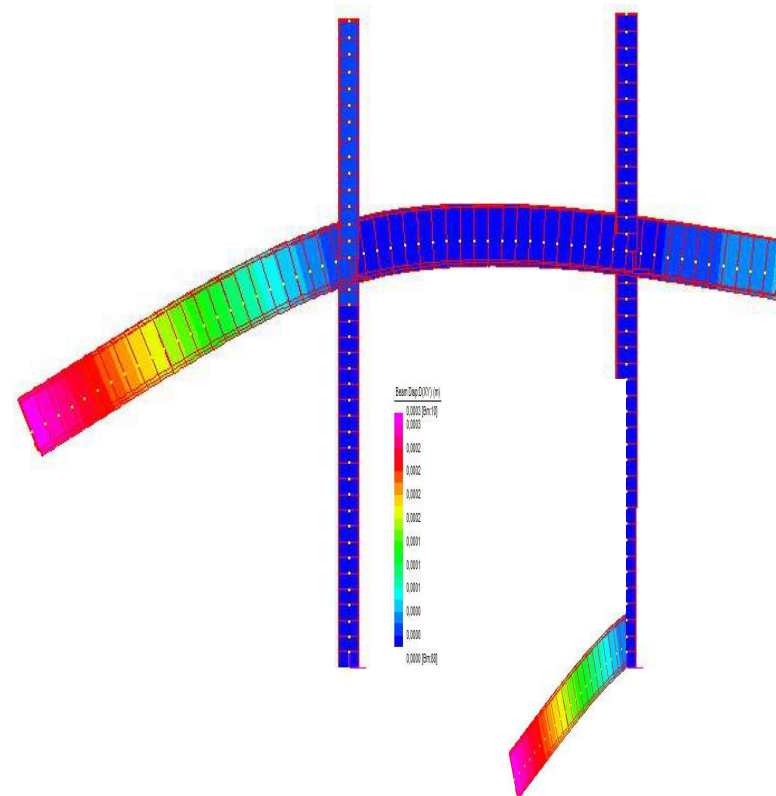
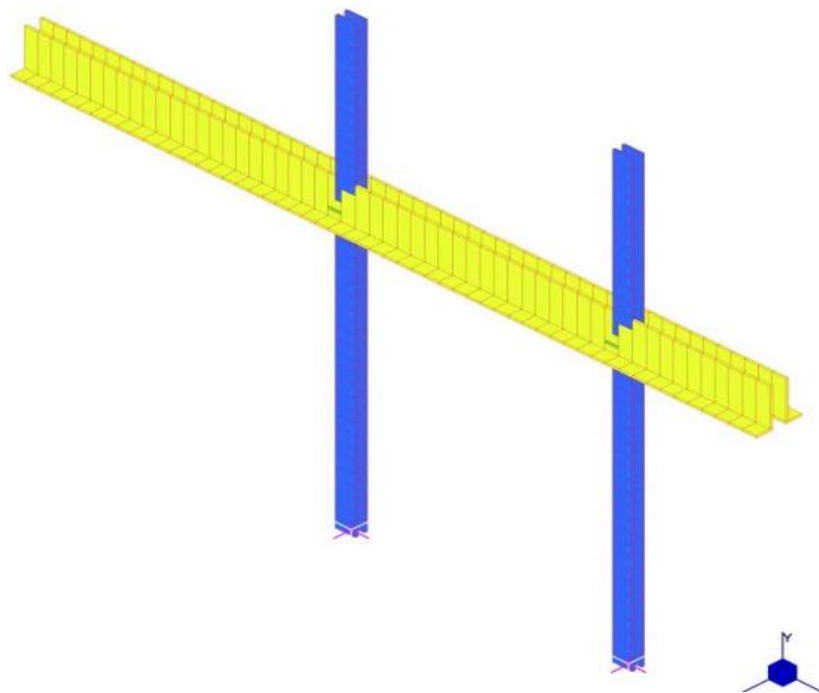
## Caso studio 3: Analisi modale sperimentale

Dopo una settimana di rilievi sulla struttura sottoposta alle vibrazioni ambientali:

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Frequenza [Hz]	1.97	3.25	4.23	7.87	9.83	18.04
Deviazione Standard [Hz]	0.037	0.147	0.032	0.088	0.287	0.067

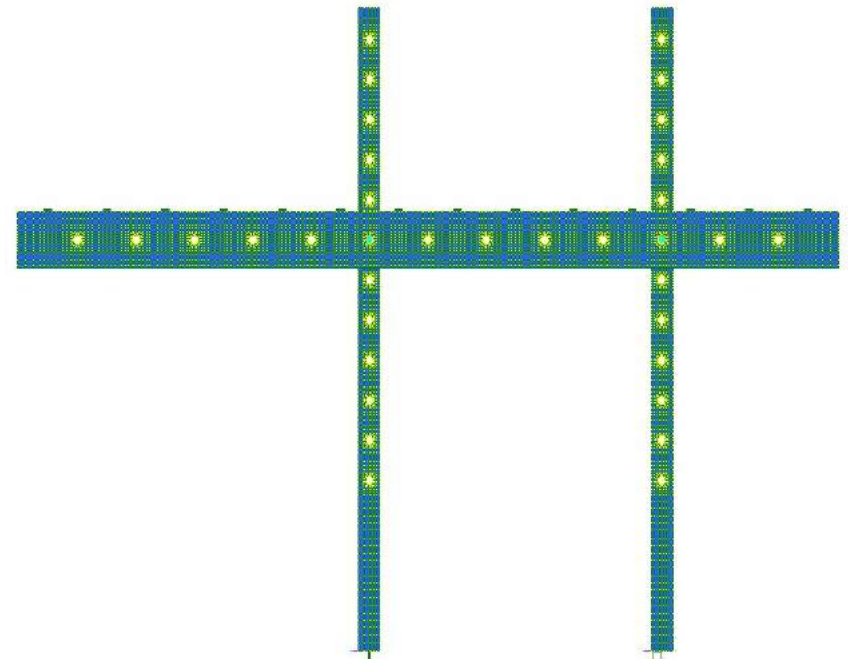
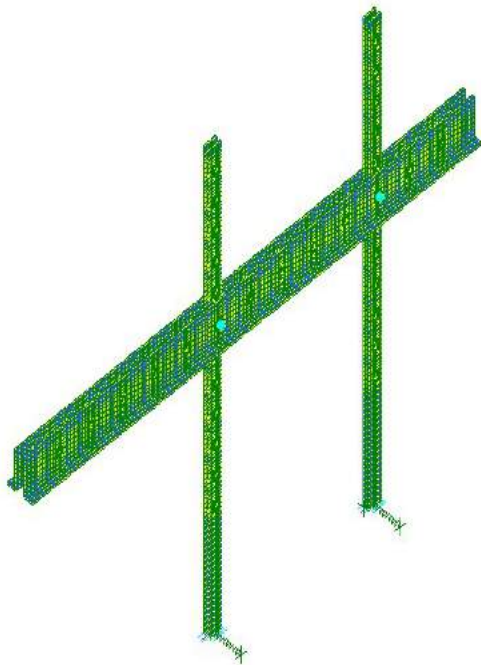
## Modello ad Elementi Finiti beam

N. nodi 138  
N. beam 137  
GDL 816



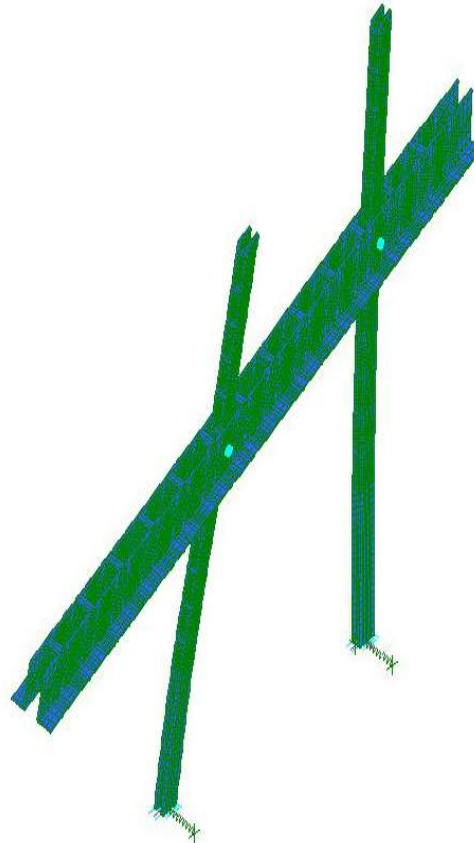
## Modello ad Elementi Finiti plate

N. nodi 17702  
N. plate 15948  
GDL 105272



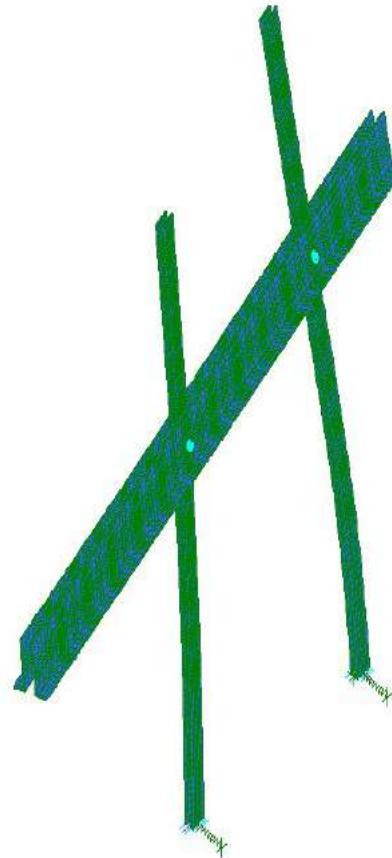
## Modello ad Elementi Finiti plate

1° modo



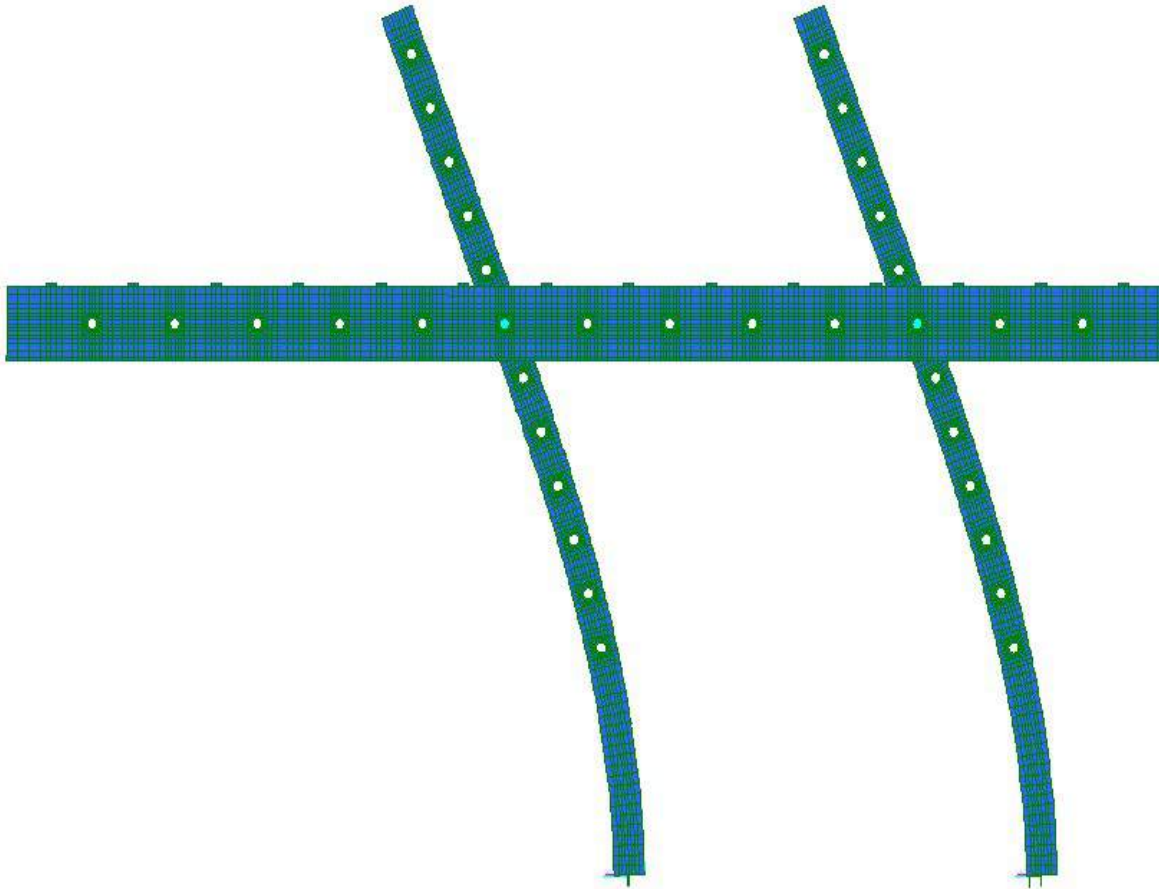
## Modello ad Elementi Finiti plate

2° modo



## Modello ad Elementi Finiti plate

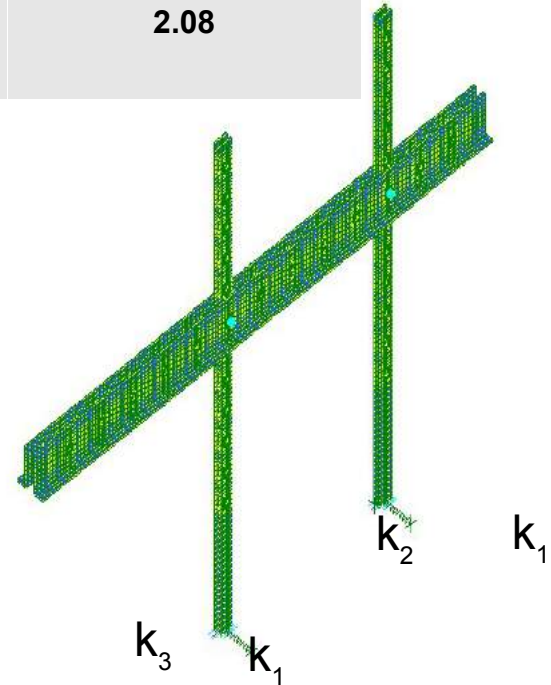
3° modo



# Ottimizzazione del Modello ad Elementi Finiti plate

	1° modo	2° modo	3° modo
Frequenze sperimentali [Hz]	1.97	3.25	4.23
Frequenze con incastro [Hz]	2.52	3.40	4.32
<b>Errori con incastro [%]</b>	<b>28.07</b>	<b>4.57</b>	<b>2.08</b>

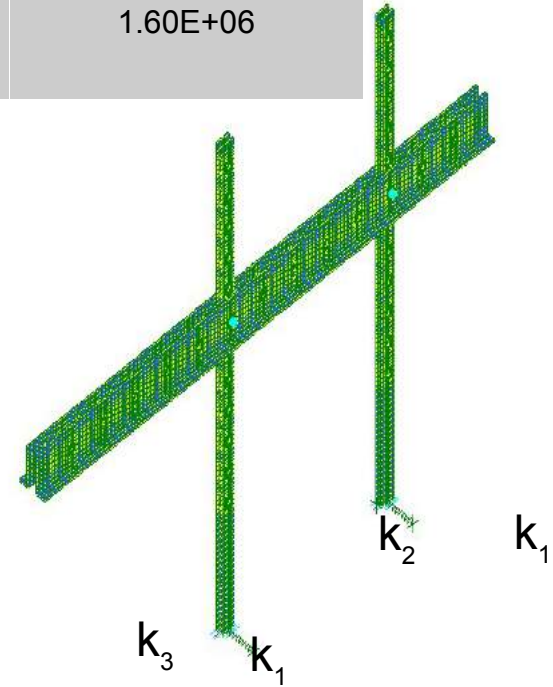
$$W(k_i) = \sum_{n=1}^3 \left( \frac{f_n(k_i) - f_{\text{exp}n}}{f_{\text{exp}n}} \right)^2$$



# Ottimizzazione del Modello ad Elementi Finiti plate

W – Errore quadratico	$k_1$	$k_2$	$k_3$
2.4578E-05	7.00E+07	1.40E+07	1.60E+06
1.0045E-06	7.00E+07	1.62E+07	1.60E+06
1.0198E-05	7.00E+07	1.67E+07	1.60E+06

$$W(k_i) = \sum_{n=1}^3 \left( \frac{f_n(k_i) - f_{\text{exp}n}}{f_{\text{exp}n}} \right)^2$$





# Ottimizzazione del Modello ad Elementi Finiti plate

	1° modo	2° modo	3° modo
Frequenze sperimentali [Hz]	1.97	3.25	4.23
Frequenze con incastro [Hz]	2.52	3.40	4.32
Frequenze calibrazione [Hz]	1.97	3.25	4.23
<b>Errori con incastro [%]</b>	<b>28.07</b>	<b>4.57</b>	<b>2.08</b>
<b>Errori calibrazione [%]</b>	<b>0.05</b>	<b>0.05</b>	<b>0.07</b>

$$k_1=70000 \text{ kNm/rad} \quad k_2=16200 \text{ kNm/rad} \quad k_3=1600 \text{ kNm/rad}$$

### **Alcune considerazioni:**

Idee per una procedura di identificazione dei parametri caratteristici delle strutture, attraverso l'analisi modale sperimentale.

- Studio di tre differenti tipologie strutturali
- Identificazione delle frequenze sperimentali con il metodo Peak Picking
- Identificazione parametrica attraverso un processo di ottimizzazione mediante algoritmi iterativi
- Applicazioni su strutture esistenti: vantaggi e svantaggi.

# Identificazione Parametrica con Analisi Modale Sperimentale

## Grazie per l'attenzione!!

Dott. Ing. Flavio Stochino  
[fstochino@uniss.it](mailto:fstochino@uniss.it)  
[fstochino@gmail.com](mailto:fstochino@gmail.com)