

ARCHI E VOLTE. ANALISI DI SICUREZZA DI STRUTTURE

seminario di aggiornamento

venerdì 14 novembre 2014



STATICA DI ARCHI E VOLTE

CENNI INTRODUTTIVI

Prof. Giuseppe Pistone

Le caratteristiche di sollecitazione interna negli archi

Le relazioni fra le sollecitazioni M, N, T (generalizzazione delle relazioni per le travi rettilinee)

$$\begin{aligned} N_1 &= N + dN \\ T_1 &= T + dT \\ M_1 &= M + dM \end{aligned}$$

$$N \sin \frac{d\theta}{2} + N_1 \sin \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} + T_1 \cos \frac{d\theta}{2} + q_n r d\theta = 0$$

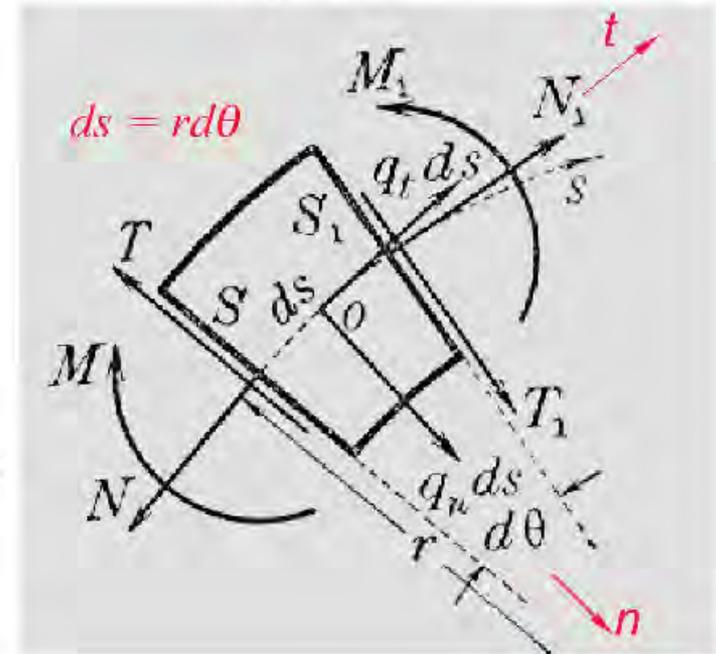
$$N \cos \frac{d\theta}{2} - N_1 \cos \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} - T_1 \sin \frac{d\theta}{2} + q_t r d\theta = 0$$

$$T \frac{rd\theta}{2} + T_1 \frac{rd\theta}{2} + M - M_1 = 0$$

trascurando gli infinitesimi del secondo ordine e ponendo:

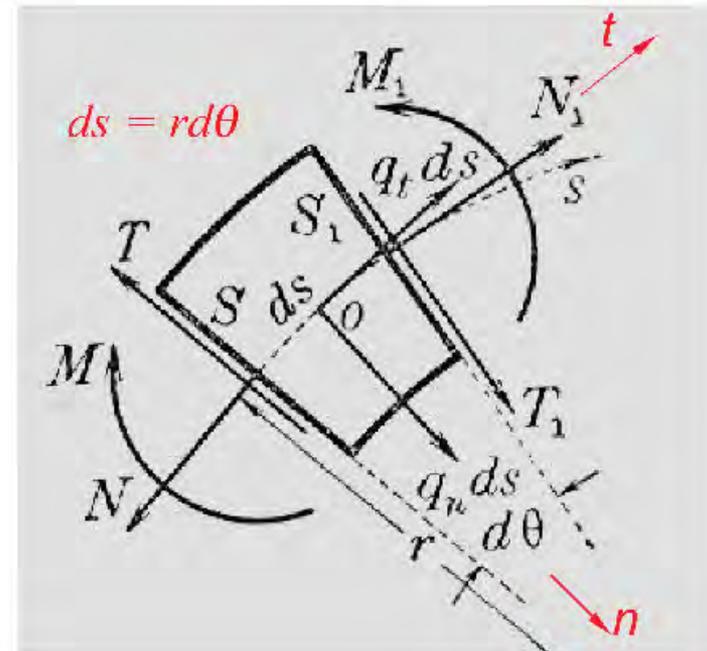
$$\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}, \cos \frac{d\theta}{2} = 1$$

si ottiene:



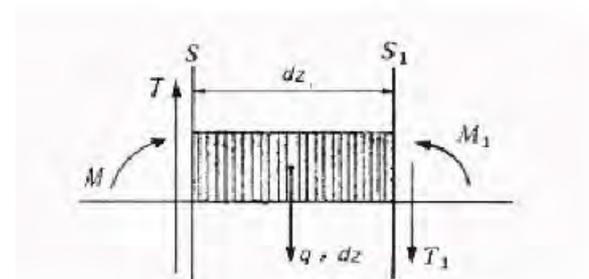
Le relazioni fra le sollecitazioni M, N, T
 (generalizzazione delle relazioni per le travi rettilinee)

$$\left\{ \begin{array}{l} N + r \frac{dT}{ds} = -r q_n \\ T - r \frac{dN}{ds} = r q_t \\ T = \frac{dM}{ds} \end{array} \right.$$



Nel caso delle travi ($r \rightarrow \infty, q_t = 0$) si ha :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= -q(z) \\ \frac{dM}{dz} &= T(z) \\ \frac{d^2 M}{dz^2} &= -q(z) . \end{aligned}$$

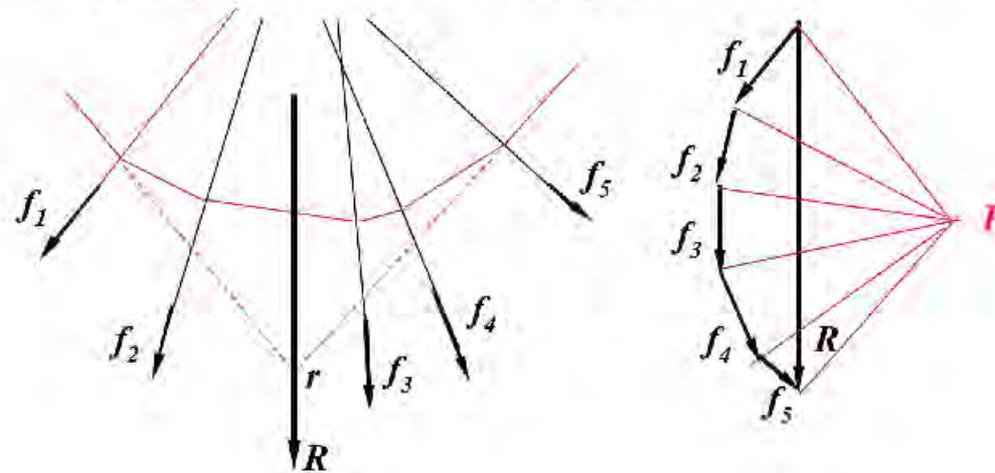


La curva delle pressioni

La curva delle pressioni

Richiami sui poligoni funicolari

- ✓ *Il poligono funicolare rappresenta la configurazione di equilibrio di una fune priva di peso sulla quale agiscano le forze del sistema, donde il nome*
- ✓ *La tensione su ogni lato della fune è misurata dalla proiettante corrispondente dal polo P*
- ✓ *La risultante R passa per il punto r di incrocio del primo e ultimo lato*

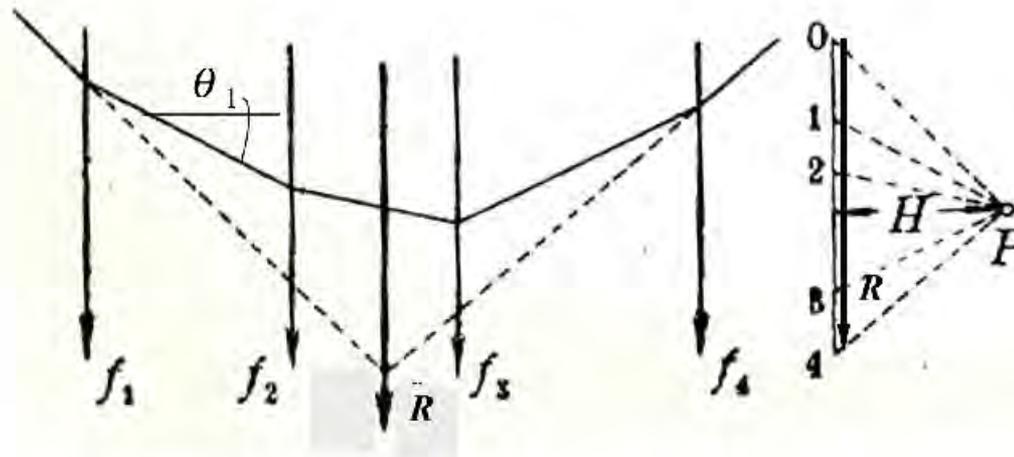


- ✓ *Se si sposta il primo lato si possono ottenere ∞ poligoni funicolari coi lati fra di loro paralleli*
- ✓ *Se si sposta il polo, che dipende da due coordinate, se ne può ottenere una duplice infinità (∞^2)*
- ✓ *Quindi un dato sistema di forze si può collegare con ∞^3 poligoni funicolari*

La curva delle pressioni

Richiami sui poligoni funicolari

- ✓ *Nel caso di forze tutte parallele (ad esempio forze verticali) le forze lungo i diversi lati del poligono funicolare, misurate dalle proiezioni dal polo P, hanno tutte la stessa componente orizzontale H, e valgono pertanto $N_i = H/\cos\theta_i$*



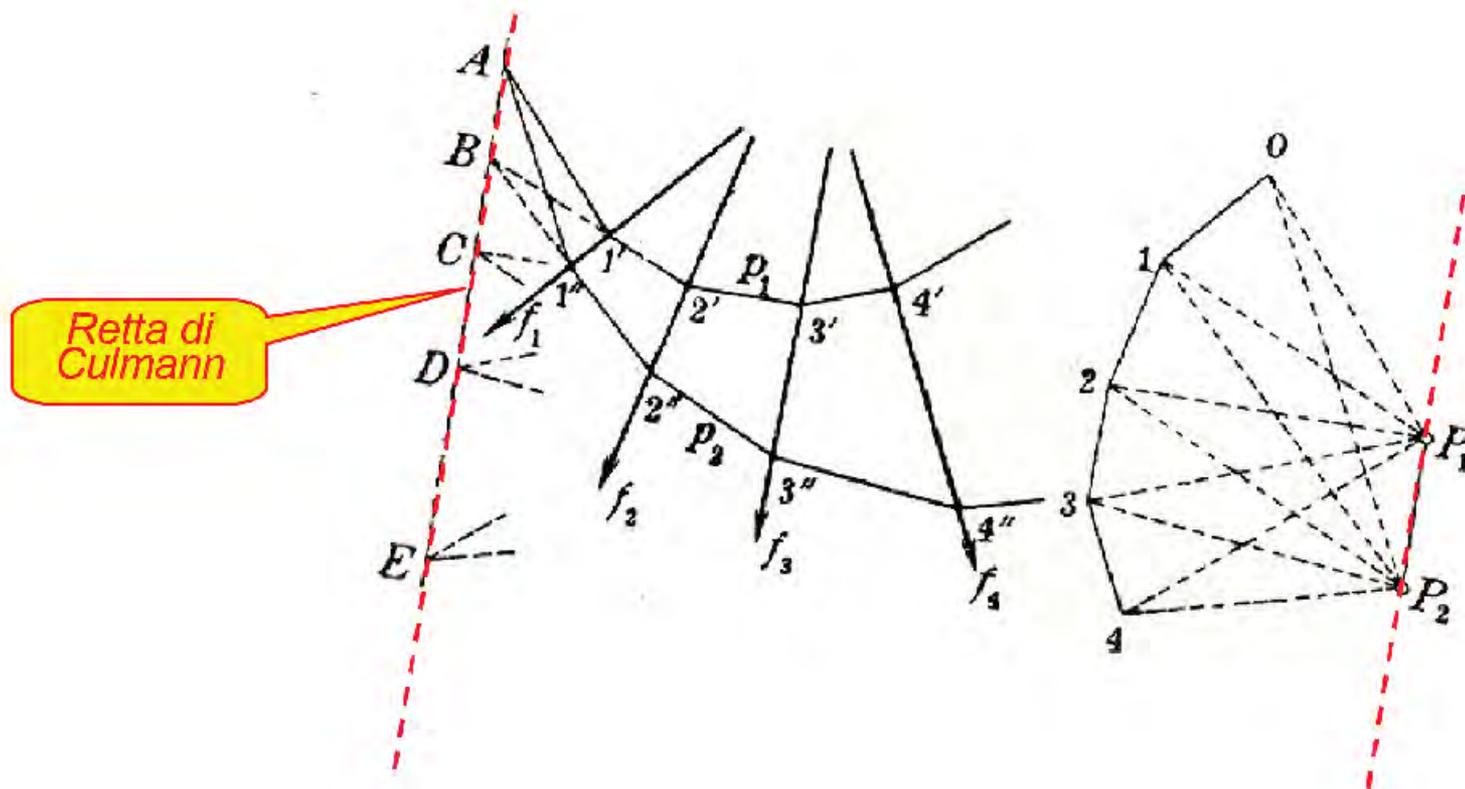
- ✓ *Aumentando la distanza polare la configurazione del poligono funicolare diviene meno incurvata ed aumenta la componente orizzontale H delle forze relative ad ogni lato*
- ✓ *Ossia: funi più tese sono soggette ad un tiro maggiore*

La curva delle pressioni

Richiami sui poligoni funicolari

✓ Teorema di Culmann

I lati corrispondenti di due poligoni funicolari costruiti con i poli P_1 e P_2 si incontrano in punti situati su una retta (retta di Culmann) parallela alla congiungente P_1 e P_2

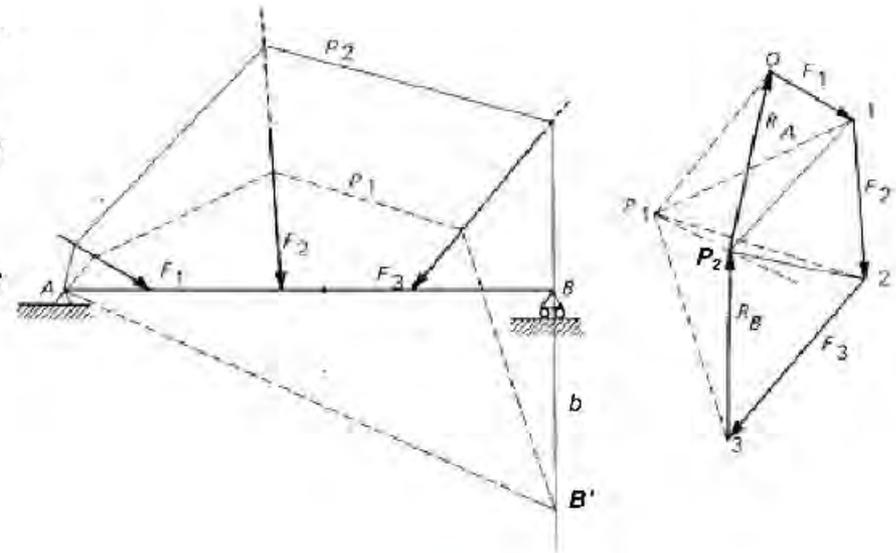


La curva delle pressioni

Richiami sui poligoni funicolari

✓ *Scomposizione di un sistema di forze in in una forza a passante per un punto A e in una forza b di cui è data la retta di azione .*

- *Si traccia un primo poligono funicolare p_1 di polo P_1 , facendo passare il primo lato per A e determinando l'intersezione B' fra l'ultimo lato e b*
- *Si traccia la retta AB' di chiusura che diviene retta di Culmann*
- *Il nuovo polo P_2 si trova all'intersezione fra la parallela per P_1 alla retta AB' e la parallela a b per 3*
- *Il poligono funicolare p_2 di polo P_2 risolve il problema: R_A e R_B sono le forze ricercate*

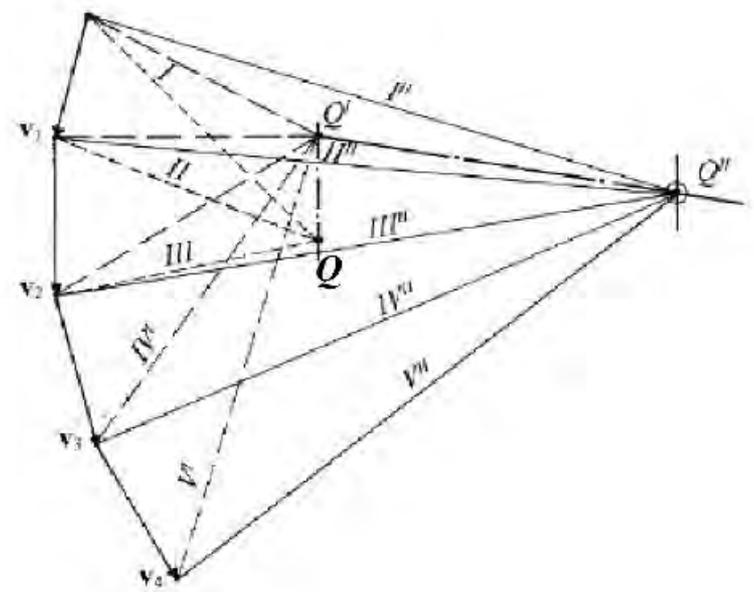
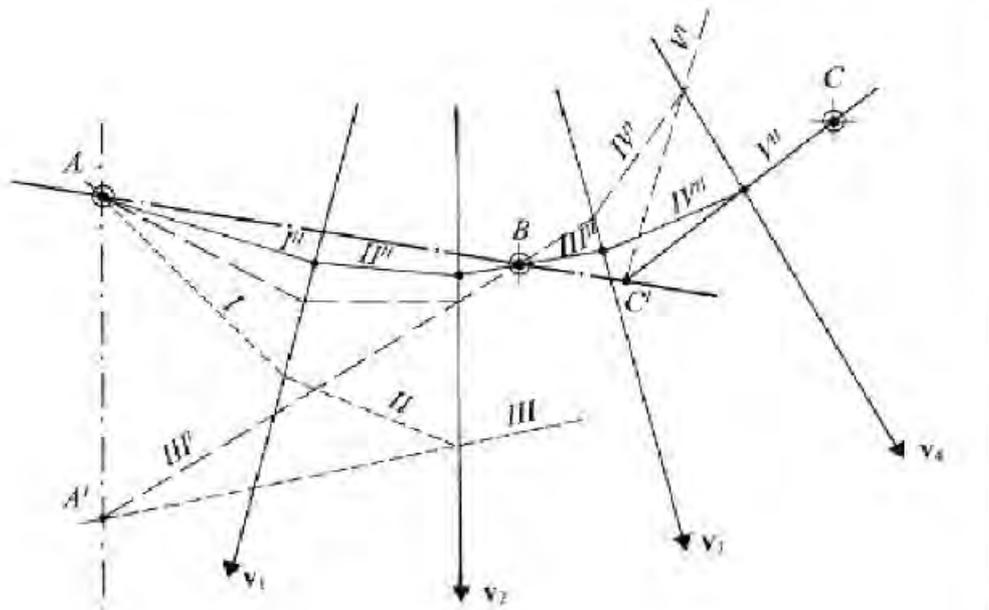


Nella figura il procedimento è applicato alla determinazione delle reazioni vincolari di una trave semplicemente appoggiata, vincolata con una cerniera in A e un carrello in B

La curva delle pressioni

Richiami sui poligoni funicolari

- ✓ Se si fissano 3 condizioni (ad es. il passaggio per 3 punti) esiste un solo poligono che soddisfa
- La costruzione in figura del poligono passante per 3 punti sfrutta le proprietà delle rette di Culmann*



Vedi: M. de Cristofaro, *Statica*, UTET

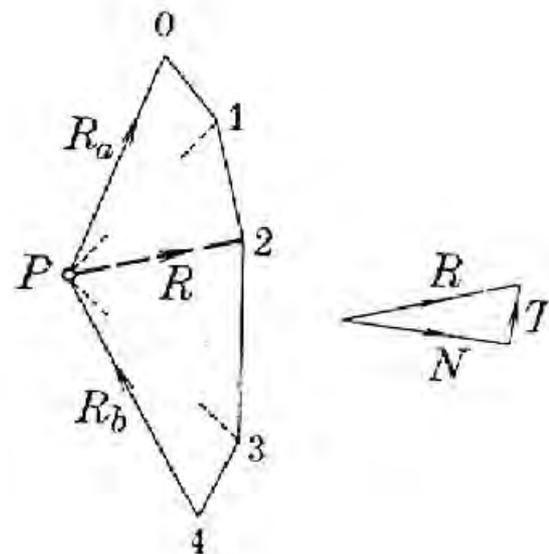
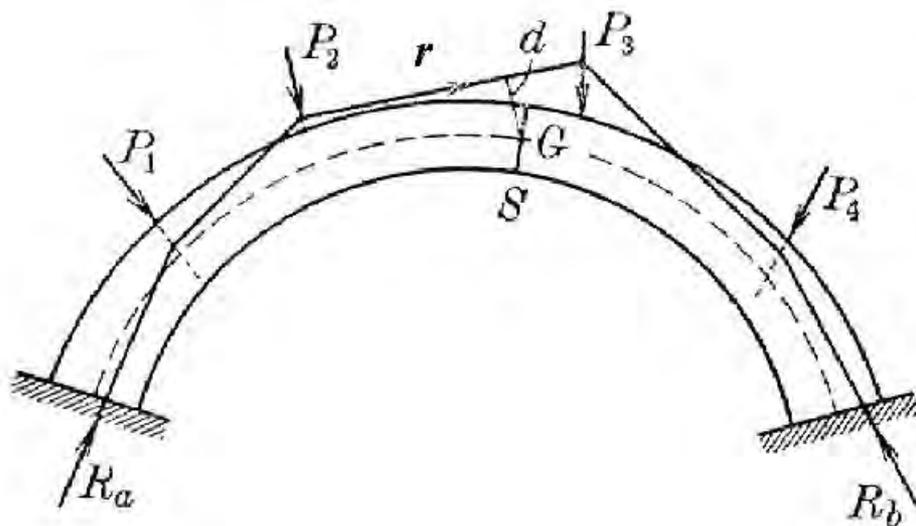
O. Belluzzi, *Scienza delle costruzioni*, 1° vol., Zanichelli

La curva delle pressioni *negli archi*

✓ Data una trave ad asse curvilineo (arco) vincolata alle due estremità, fra gli infiniti poligoni funicolari con cui si possono collegare le forze applicate ne esiste uno e uno solo che ha come primo e ultimo lato le due reazioni d'imposta R_a ed R_b .

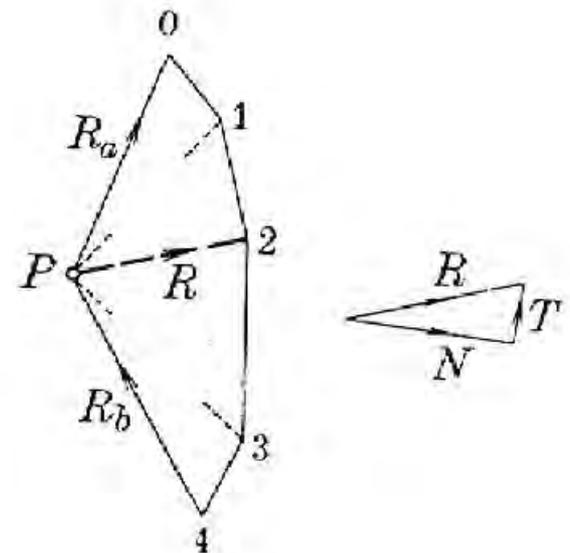
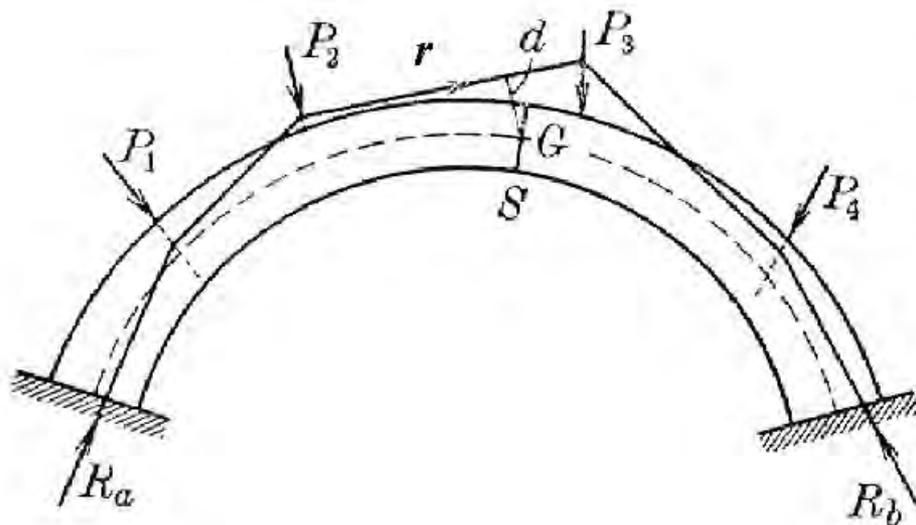
Infatti, imponendo che il primo lato sia una forza avente la retta d'azione e la grandezza di R_a , si fissano tre condizioni che determinano il poligono.

✓ Un lato r generico di tale poligono è la retta d'azione della risultante di tutte le forze che precedono quel lato, compresa la reazione R_a , mentre l'intensità è data dalla corrispondente proiettante R del poligono delle forze. Quindi l'ultimo lato coincide necessariamente con la reazione R_b .



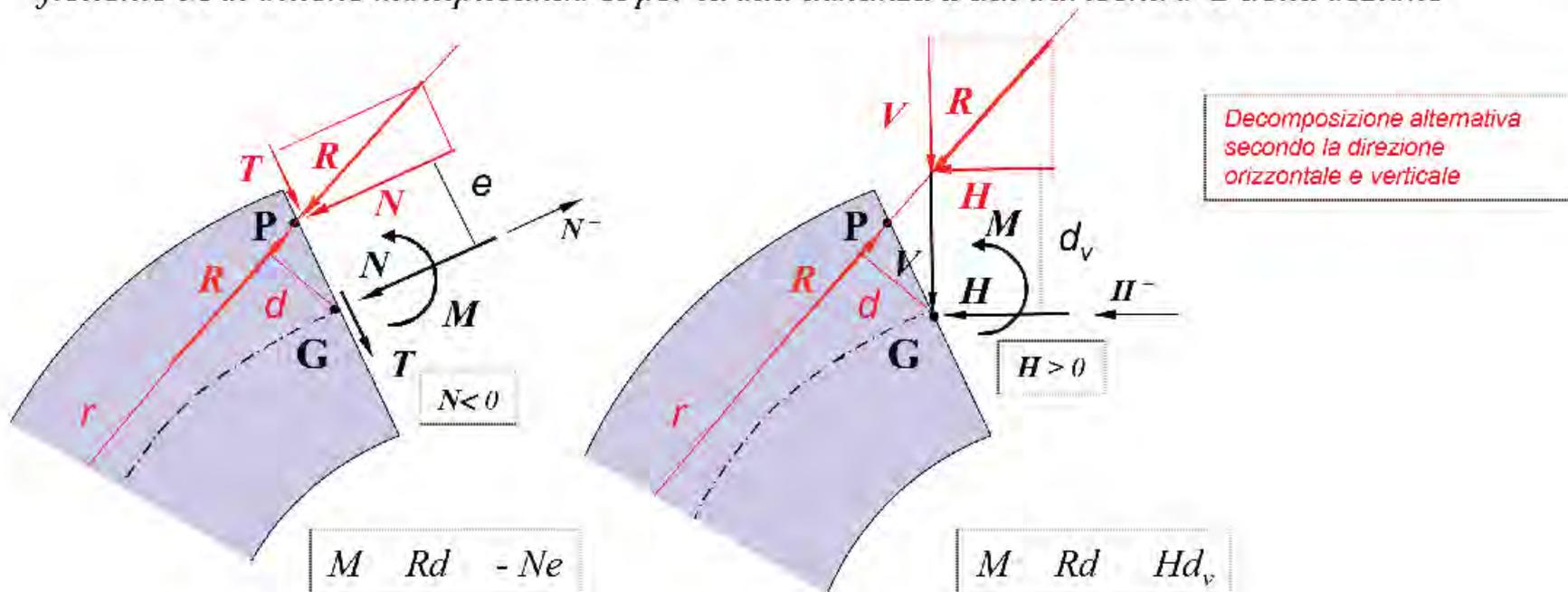
La curva delle pressioni *negli archi*

- ✓ Questo poligono delle successive risultanti è detto poligono delle pressioni o curva delle pressioni (di solito è una curva, essendo le forze ripartite).
- ✓ Le caratteristiche di sollecitazione nella sezione S si possono dedurre dalla R agente su r .
- ✓ Infatti lo sforzo normale N e lo sforzo di taglio T in S si ottengono decomponendo R , e il momento flettente M si ottiene moltiplicando R per la sua distanza d dal baricentro G della sezione



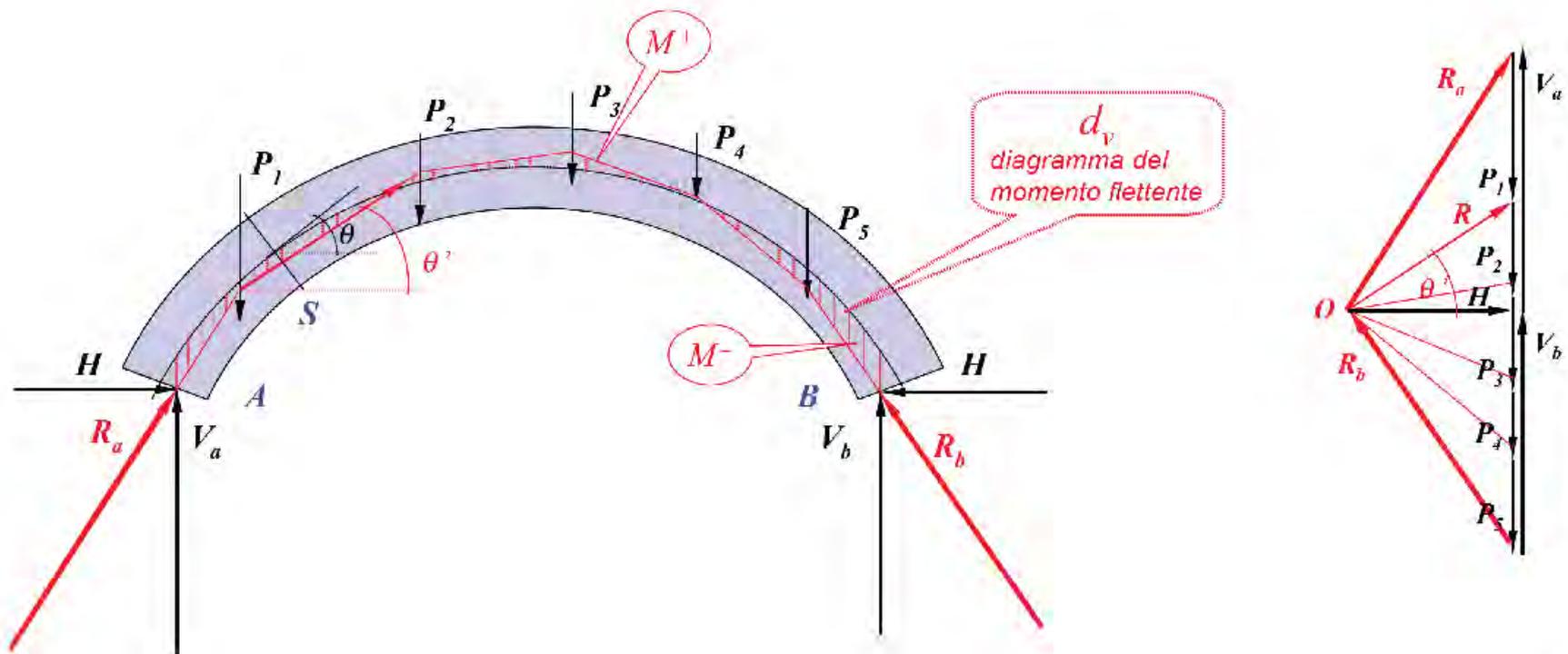
La curva delle pressioni *negli archi*

- ✓ Questo poligono delle successive risultanti è detto poligono delle pressioni o curva delle pressioni (di solito è una curva, essendo le forze ripartite).
- ✓ Le caratteristiche di sollecitazione nella sezione S si possono dedurre dalla R agente su r .
- ✓ Infatti lo sforzo normale N e lo sforzo di taglio T in S si ottengono decomponendo R , e il momento flettente M si ottiene moltiplicando R per la sua distanza d dal baricentro G della sezione

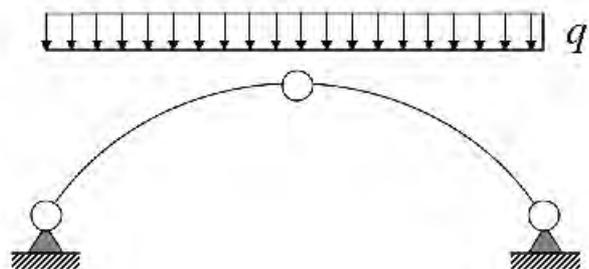


La curva delle pressioni negli archi soggetti a carichi verticali

- ✓ In presenza di soli carichi verticali, la risultante R relativa a qualunque sezione S ha la componente orizzontale H costante, uguale alla componente orizzontale (spinta) delle reazioni R_a , R_b .
- ✓ In questo caso è più comodo calcolare M in una sezione S mediante $M = Hd_v$
- ✓ Quindi la curva delle pressioni riferita all'asse dell'arco, con ordinate verticali d_v , è il diagramma M a meno del fattore H .



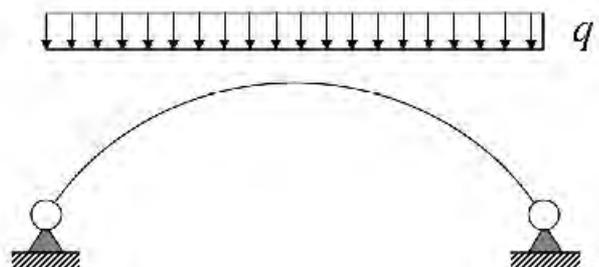
Schemi statici e condizioni di vincolo



Arco a tre cerniere

Isostatico

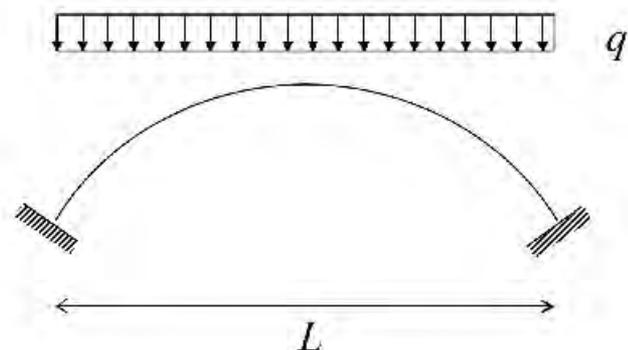
$$2 \times 3_c - 3_g \times 2 = 0$$



Arco a due cerniere

1 volta iperstatico

$$2 \times 2_c - 3_g \times 1 = 1$$



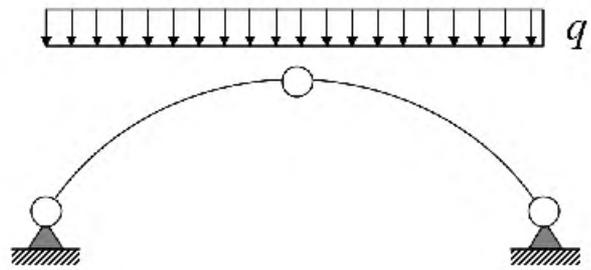
Arco incastrato

3 volte iperstatico

$$3 \times 2_i - 3_g \times 1 = 3$$

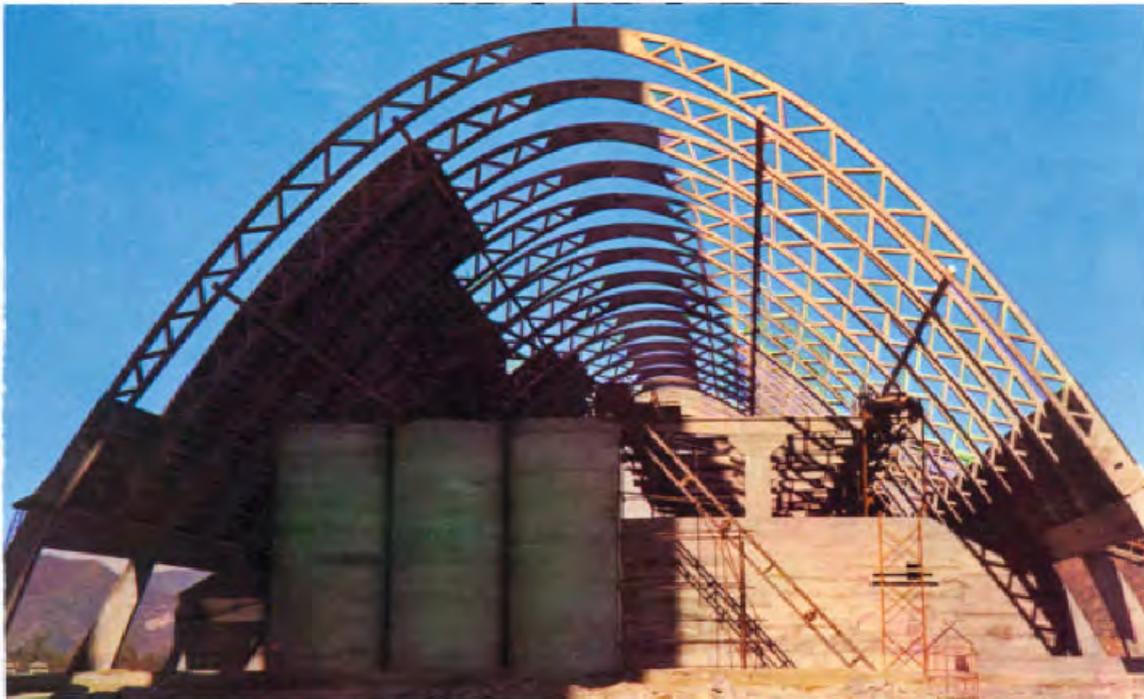
2 volte iperstatico in caso di simmetria

Arco a tre cerniere

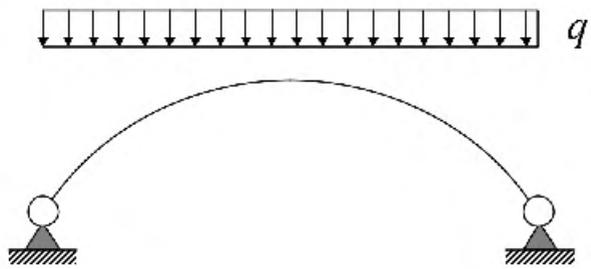


Isostatico

$$2 \times 3_c - 3_g \times 2 = 0$$



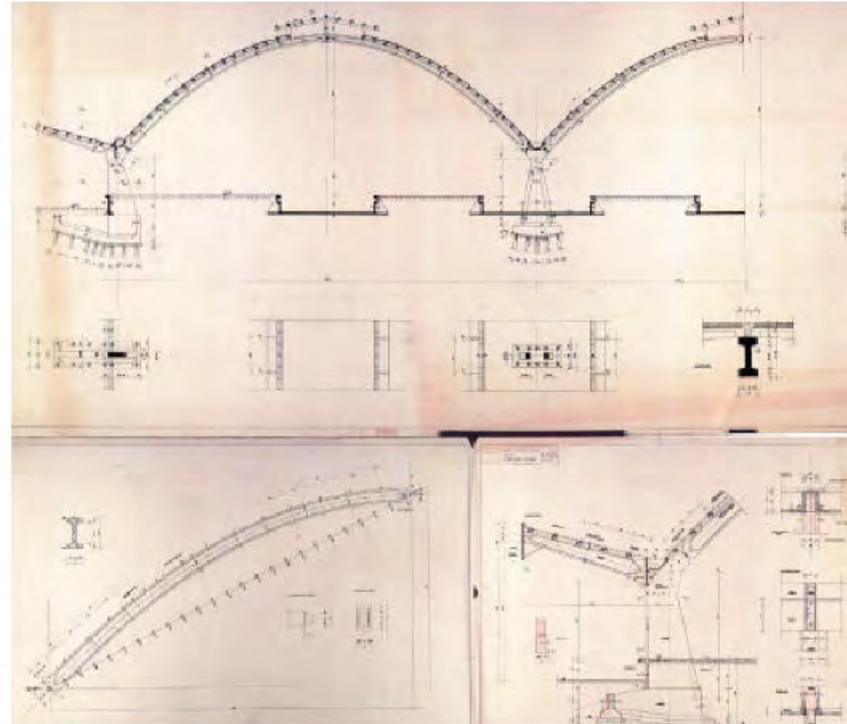
Cementeria di Robilante (CN)
R. Perazzone, M.A. Chiorino, 1963



Arco a due cerniere

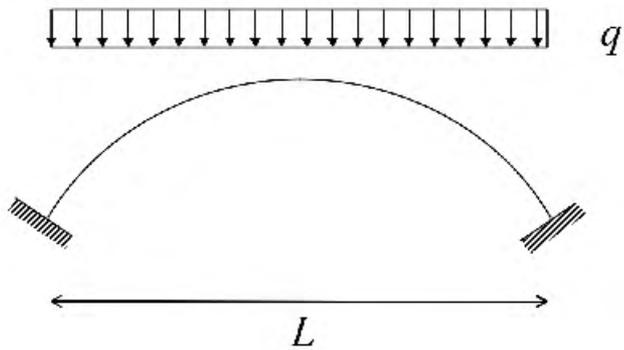
1 volta iperstatico

$$2x2_c - 3x1_g = 1$$



Centro operativo Gondrand, Pioltello (MI)
A. Favini, 1968





Arco incastrato

3 volte iperstatico

$$3x2_i - 3x1_g = 3$$

2 volte iperstatico in caso di simmetria



Natchez Trace Bridge

riferimenti bibliografici:

- ***“THE STONE SKELETON, Structural Engineering of Masonry Architecture”***
IACQUES HEYMAN, CAMBRIDGE University Press.
- ***“SISTEMI VOLTATI IN MURATURA TEORIA E APPLICAZIONI”***
Autori vari, ed. DEI Tipografia del genio civile
- ***“IL SAGGIO DI COULOMB SULLA STATICA”***
J. Heyman, ed. Hevelius edizioni
- ***“PONTI IN MURATURA: DIFETTI E PATOLOGIE”***
M. Mazzoleni, L. Jurina, Estratto dal convegno organizzato dal CIAS *Ponti e viadotti: ispezioni visive e tecniche di risanamento*, Bolzano, 18 – 19 Ottobre 2006.

Programmi di calcolo:

- <http://dicata.ing.unibs.it/gelfi/arco.htm>
- <http://www.limitstate.it/ring>
- <http://www.aedes.it>