

**MECCANISMI DI COLLASSO DELLE COSTRUZIONI STORICHE PER  
AZIONE SISMICA ED INTERVENTI COMPATIBILI DI MIGLIORAMENTO  
MEDIANTE MATERIALI COMPOSITI**

**Angelo Di Tommaso\*, Francesco Focacci\*, Anna Saetta\***

\*Università IUAV di Venezia  
Dipartimento di Costruzione dell'Architettura  
Campus Terese - Dorsoduro 2206, 30123 Venezia, Italy

**Sommario.** *In questo lavoro viene presentata una procedura metodologica di analisi di vulnerabilità per le costruzioni storiche in muratura in zona sismica. Essa prevede una fase iniziale di identificazione dei meccanismi di collasso più probabili, seguita da una valutazione dei possibili interventi con materiali compositi per la riduzione della vulnerabilità, tenendo altresì conto delle limitazioni imposte dai Criteri di Restauro.*

*Considerando la costruzione composta da macroelementi strutturali, si punta alla definizione dei meccanismi di collasso, sulla base di atlanti storici dei danni intervenuti in macroelementi simili e con l'ausilio di analisi numeriche di dettaglio, sia in ambito lineare che non lineare.*

*L'utilizzo delle tecniche di analisi limite ben si presta, una volta individuati i meccanismi, allo studio dell'efficacia di diversi metodi di intervento, stante il fatto che l'applicazione di materiali compositi modifica il meccanismo di collasso della struttura, ed incrementa conseguentemente il moltiplicatore dei carichi che produce l'attivazione del meccanismo.*

*Inoltre vengono fatti alcuni riferimenti ad applicazioni su costruzioni storiche di compositi FRP e FRCM quali inibitori di meccanismi.*

## 1 INTRODUZIONE

L'approccio che utilizza il concetto di "organismo complesso" composto da "macroelementi strutturali" fra loro interconnessi è funzionale ad un'efficace analisi semplificata del danno atteso, in fase di crisi sismica, per le costruzioni storiche in muratura [1].

Lo studio dei più probabili meccanismi di collasso che possono interessare tali costruzioni, sia a livello locale – e quindi di singolo macroelemento – sia a livello globale, è un pre-requisito indispensabile per valutare il livello di sicurezza dell'opera in condizioni di carico sismico e per consentire la successiva definizione degli eventuali interventi di miglioramento compatibili con la tipologia dell'opera in esame.

Brevemente, l'approccio consiste in una prima fase di identificazione dei macroelementi dai quali la struttura complessa può pensarsi costituita, ed in una seconda fase di valutazione delle accelerazioni di collasso relative ai singoli macroelementi pensati isolati dal resto della costruzione (di eventuali interazioni tra i diversi macroelementi si potrà tenere conto in via approssimata definendo sistemi di forze di interazione lungo le linee di confine).

La valutazione della capacità sismica dei singoli macroelementi può essere condotta mediante l'analisi cinematica lineare e non lineare. Questo approccio (suggerito anche nell'allegato 11.C della normativa [2] per l'analisi dei meccanismi locali di collasso) si rivela particolarmente semplice e vantaggioso in quanto coinvolge unicamente considerazioni di equilibrio. Nella versione "lineare", il metodo prevede la preventiva determinazione del meccanismo di collasso del macroelemento e la successiva valutazione dell'accelerazione orizzontale che attiva il meccanismo. Nella versione "non lineare" il metodo prevede inoltre la determinazione del legame tra il moltiplicatore orizzontale dei carichi gravitazionali e lo spostamento di un punto di controllo.

Sia nella fase di identificazione dei macroelementi che nella fase di studio e valutazione dei meccanismi di collasso dei singoli macroelementi, si rivela molto utile la consultazione di atlanti storici dei danni causati da eventi sismici in strutture simili. Inoltre, particolarmente efficace risulta l'ausilio di analisi numeriche di dettaglio, sia in ambito lineare che non lineare, in grado di fornire indicazioni su eventuali situazioni di criticità, anche attraverso valutazioni quantitative dei coefficienti di sicurezza nei confronti dell'azione sismica di progetto, [3].

Per contrastare i meccanismi individuati come più probabili, l'uso dei compositi aderenti alle superfici (FRP o FRCM) costituisce una delle tecniche più promettenti per il miglioramento sismico [4]. La presenza del composito (posizionato in base all'analisi dei possibili meccanismi di collasso della struttura non rinforzata) muta l'insieme dei meccanismi cinematicamente ammissibili, inibendo quelli ai quali corrispondono i valori più bassi dei moltiplicatori di collasso. La struttura rinforzata avrà quindi moltiplicatori di collasso delle azioni superiori a quelli relativi alla condizione precedente all'intervento.

Sia in assenza che in presenza di rinforzo, le operazioni di identificazione dei macroelementi e dei meccanismi di collasso dei singoli macroelementi sono abbastanza semplici relativamente ad alcuni casi tipici, ma possono complicarsi notevolmente in presenza di costruzioni geometricamente complesse ed articolate. In questo contesto, l'utilizzo di analisi numeriche lineari e non lineari è di grande importanza. Dette analisi

numeriche possono inoltre essere di aiuto nella valutazione dell'interazione tra macroelementi collegati.

Nel caso delle costruzioni storiche però non tutte le soluzioni di rinforzo strutturalmente valide sono realizzabili per il rispetto delle limitazioni imposte dai Criteri di Restauro [5] e [6] attualmente condivisi e accettati dalla comunità dei cultori della conservazione. Gli interventi potranno scegliersi fra quelli strutturalmente validi che sono anche “compatibili” [7].

## 2 MACRO-ELEMENTI STRUTTURALI

A partire dal terremoto del Friuli (1976), esiste in Italia una vasta casistica di danni alle costruzioni storiche che sono occorsi in occasione dei terremoti successivi. Dalla analisi di questi dati risulta accettabile ed efficace un approccio che punta ad una divisione concettuale della costruzione in Macro-Elementi Strutturali (**SM-Es**, **Structural Macro-Elements**) che presentano comportamento strutturale codificabile e ricorrenza di danno sismico tipico [8].

In un organismo chiesastico, sempre complesso, la facciata, l'abside, la cupola, l'arco trionfale, et cetera, sono Macro-Elementi strutturali (Figura 1). Ciascuno ha evidenziato meccanismi di collasso tipici in relazione alla direzione prevalente del sisma ed alla morfologia architettonica, a volte modificati per l'interazione dinamica con i Macro-elementi adiacenti. Queste casistiche, ovvero atlanti di danno, rappresentano la base di partenza per l'analisi dei meccanismi potenziali ai fini dell'Analisi Limite. In una prima fase non viene considerata l'interazione fra Macro-Elementi Strutturali.

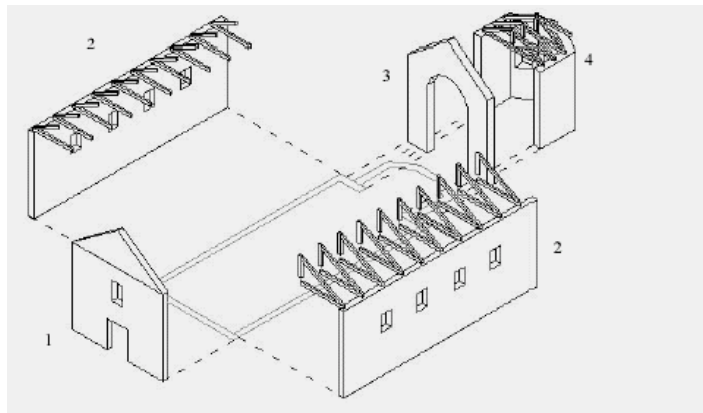


Figura 1: Macro-Elementi Strutturali tipici di organismo chiesastico basilicale. 1. facciata - 2. pareti laterali - 3. arco trionfale - 4. abside.

Gli **SM-Es** spesso consistono in solidi murari “bi-dimensionali” (lastre, piastre, volte sottili), individuati da superfici medie della geometria euclidea (piani, superfici curve) associate a piccoli spessori. L'intera costruzione può esser vista come l'unione di SM-Es assemblati lungo “linee di aggregazione”.

Durante la formazione del meccanismo che conduce al collasso, sono fisicamente evidenti le **linee di frattura** (**Fracture Lines, FL**) ascrivibili alla partizione della superficie media di supporto dello SM-E (*intra* SM-E) ovvero ricalcanti le linee di aggregazione (*inter* SM-E). In Figura 2 sono riportate le linee di frattura (FL) in Macro-

Elementi Strutturali (SM-E) per azione sismica trasversale all'asse basilicale, mentre in Figura 3 sono riportati i meccanismi di crollo per il macroelemento di facciata.

Le linee di frattura sono sede di deformazione localizzata ove si producono i distacchi o gli scorrimenti tipici della meccanica della frattura (Modo I, Modo II, Modo III). Le partizioni determinate dalle linee di frattura generano i blocchi che durante l'azione sismica si muovono soggetti al peso proprio ed alle forze di inerzia. La nuova struttura a blocchi nel moto sismico può perdere l'equilibrio, globale o locale, pervenendo al crollo.

Lungo le linee di frattura avviene la massima dissipazione energetica, conseguente al modo di spostamento relativo, che si confronta con il rilascio dell'energia di deformazione liberatasi per la frammentazione e con l'apporto energetico dell'azione sismica. Da notare che la struttura in frammentazione cambia le caratteristiche dinamiche e, quindi, l'interazione con il suolo. Questo approccio è valido se la muratura originaria è compatta, con mattoni o pietre connesse da malte consistenti. Si escludono, per l'applicazione di questo approccio, le murature a sacco e quelle con malte inesistenti o molto scadenti.



Figura 2: Linee di frattura (FL) in Macro-Elementi Strutturali (SM-E) per azione sismica trasversale all'asse basilicale.

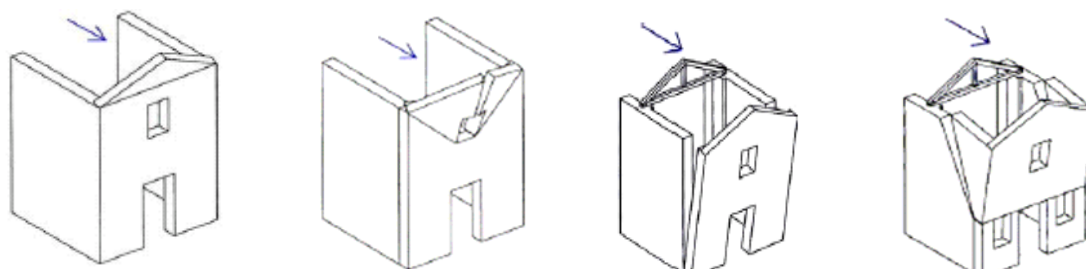


Figura 3: Meccanismi di crollo per il macroelemento di facciata. Primi due intra-elemento, terzo inter-elementi, quarto complesso coinvolgente macro-elementi contigui

### 3 ANALISI PER LA DETERMINAZIONE DEI MECCANISMI DI COLLASSO

Il carico applicato ad una struttura può solitamente pensarsi come costituito da un *carico permanente* (peso proprio della struttura, carichi permanenti portati) che, applicato da solo, non produce il collasso della struttura per meccanismo cinematico quale che sia la sua entità, ed da un *carico variabile* (carico accidentale, azione sismica,...), del quale si cerca un moltiplicatore  $\lambda_c$  tale che, applicando contemporaneamente il carico permanente e  $\lambda_c$  volte il carico variabile si produce il collasso della struttura per meccanismo, ossia con “labilità acquisita”.

In quanto segue, la muratura è considerata non resistente a trazione ed infinitamente rigida e resistente a compressione.

Sotto queste ipotesi, in un concio di muratura la massima eccentricità con la quale uno sforzo normale di compressione può essere applicato è tale che il centro di pressione giaccia sul bordo della sezione trasversale del concio stesso (indipendentemente dall'entità dello sforzo normale); centri di pressione fuori dalla sezione non possono sussistere per evidenti ragioni di equilibrio. Dal punto di vista cinematico, la posizione limite del centro di pressione sul bordo della sezione può essere considerata come la formazione di una cerniera sul bordo (sconnessione semplice rotazionale di tipo monolatero posizionata ad un lembo della sezione trasversale, che apporta un grado di libertà aggiunto).

Si può affermare che una struttura di muratura tipo “beam-column” collassa quando i carichi agenti (permanenti e variabili) producono la formazione di un numero di cerniere (nel senso sopra specificato) tale da rendere labile la struttura (labilità acquisita) e quindi da trasformarla in un meccanismo, detto *meccanismo di collasso*. Il carico di collasso è individuato dal minimo valore del moltiplicatore  $\lambda_c$  tra quelli associati ai diversi possibili meccanismi di collasso.

In altre parole, per una struttura di muratura tipo “beam column”, con l'ipotesi di resistenza a compressione infinita, non si ha il collasso quando i carichi agenti (permanenti e variabili) sono tali che in ogni sezione il centro di pressione è in essa contenuto. Il carico di collasso è il più grande tra i carichi che soddisfano la condizione di cui sopra.

Pertanto il collasso della struttura, con l'ipotesi di resistenza infinita a compressione, è dettato unicamente da considerazioni di equilibrio.

La possibilità di utilizzare analisi numeriche agli elementi finiti, di supporto alla determinazione dei meccanismi di collasso, è oggetto di ricerca da molti anni. Si possono trovare in letteratura diversi approcci, dai più semplici che schematizzano i singoli macro-elementi con ipotesi di leggi costitutive lineari, allo scopo di fornire un supporto alla determinazione del più probabile meccanismo di collasso dell'elemento stesso, fino ad analisi dell'intero complesso monumentale, con leggi costitutive dei materiali non lineari (i.e. leggi di frattura, leggi di danno, etc.).

In ogni caso affiancare all'analisi limite una schematizzazione ad elementi finiti si rivela un ottimo ausilio, indispensabile in tutte quelle situazioni nelle quali non è facilmente riconoscibile a priori il tipo (o i tipi) di meccanismo di collasso più probabile.

Interessante è anche l'utilizzo di una modellazione complessiva dell'intera opera monumentale, generalmente in ambito lineare, allo scopo di supportare il progettista nella prima fase di individuazione dei macroelementi, che come ben noto non sono sempre immediatamente riconoscibili in strutture non codificate.

#### **4 UTILIZZO DEI COMPOSITI**

I materiali compositi possono essere utilizzati per contrastare i meccanismi di collasso più probabili per la struttura non rinforzata conseguendo la modifica del meccanismo di collasso, alla quale corrisponde un incremento del moltiplicatore di collasso delle forze orizzontali. In generale, possono identificarsi due diverse “strategie di rinforzo”. La prima prevede l'utilizzo di elementi di rinforzo disposti in modo che la struttura rinforzata collassi ancora per meccanismo cinematico (sebbene con carichi più

elevati); la seconda prevede l'utilizzo di elementi di rinforzo disposti in modo da impedire ogni meccanismo cinematico di collasso. In quest'ultimo caso, il collasso avviene per raggiungimento della resistenza dei materiali o per crisi dell'interfaccia tra muratura e materiale composito. In questa nota si considera esplicitamente solo il caso di strutture rinforzate il cui collasso avviene ancora per meccanismo cinematico; alcuni aspetti riguardanti il caso di disposizione di rinforzo tale da impedire ogni possibile meccanismo cinematico di collasso sono trattati in [9].

La tecnica strutturalmente più efficace è il "Plating" (Figura 4 e Figura 5), ossia il ricoprimento di una parte della superficie muraria con composito che contrasta l'attivazione di linee di frattura e quindi la formazione di cerniere. A tal fine si hanno a disposizione i compositi a fibra continua e matrice polimerica (FRP, Fiber Reinforced Polymer) oppure i compositi a fibra continua e matrice a base cementizia (FRCM, Fiber Reinforced Cementitious Matrix). Questa tecnica è proponibile nel caso di costruzioni storiche solo nel caso di rifacimento di intonaco oppure in posizioni non visibili (es. estradosso di volte). Relativamente alle questioni di compatibilità termo-igrometrica e di resistenza al fuoco sono preferibili gli FRCM, mentre gli FRP sono, in genere, strutturalmente più efficienti, a parità di "superficie coperta".

Una tecnica strutturalmente valida può considerarsi il "**Repointing**" [10], ossia l'armatura dei giunti di malta orizzontali con lamine o barrette di pultruso. Questa tecnica, ancora poco diffusa, potrebbe consentire applicazioni sui paramenti murari a "faccia vista" in quanto consente il restauro della finitura esterna del giunto senza alcun impatto visivo.

Una terza possibilità, invero alquanto invasiva, è quella del "**Bed Joint Revitalizing**", consistente nello smontaggio dei filari di mattoni o pietre, con rifacimento dei giunti orizzontali mediante composito a malta armata di tessuto di fibre continue strutturali. In questo caso è possibile intervenire su murature a faccia vista non incidendo sull'aspetto visivo. In Figura 6 è riportato uno schema delle tecniche di intervento con FRP oppure FRCM

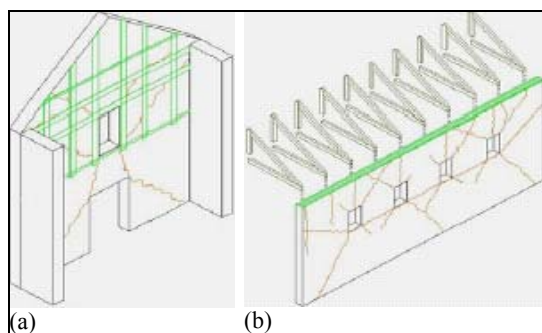


Figura 4: (a) "Plating" a contrasto del meccanismo di crollo della facciata, in caso di possibilità di rifacimento di intonaco; (b) "Plating" sul coronamento di parete laterale a contrasto del meccanismo di crollo, soluzione a ridotta efficacia strutturale ma senza impatto visivo.

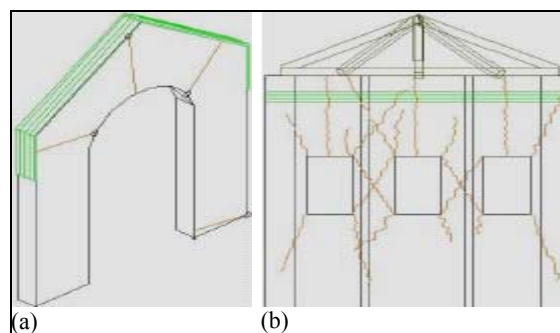


Figura 5: (a) "Plating" con FRP sul coronamento dell'arco trionfale a contrasto del meccanismo di crollo, soluzione a ridotta efficacia ma senza impatto visivo; (b) "Plating" con FRP a cinturazione della sommità absidale a contrasto dei meccanismi di crollo, con impatto visivo per murature a faccia vista.

La scelta della tipologia di intervento deve farsi scegliendo la più efficace fra quelle compatibili con i canoni del Restauro. Ciò significa che la soluzione strutturale ottimale non sempre può essere accettata.

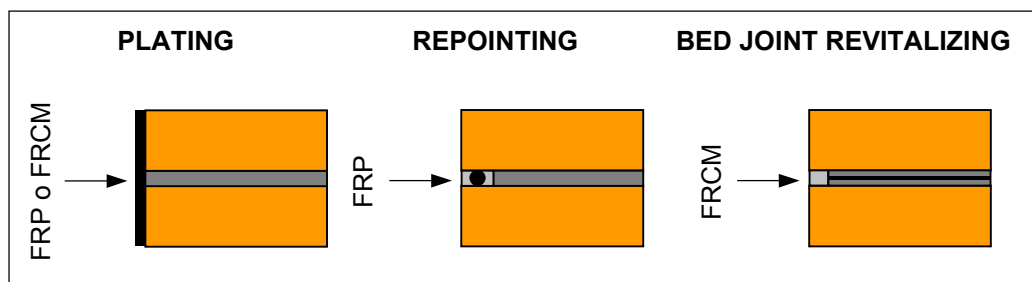
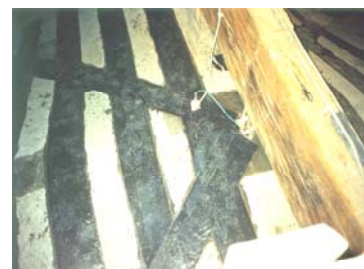


Figura 6: Schema delle tecniche di intervento con FRP oppure FRCM.

Le tecniche menzionate sono attualmente utilizzate a vario titolo e non pochi sono gli interventi realizzati. Si riportano alcune citazioni per la loro emblematicità.

Le volte a crociera della Basilica di S. PETRONIO a Bologna sono state sottoposte alla tecnica del “Plating” mediante FRP per ridurre la vulnerabilità. L’applicazione punta al contrasto dei meccanismi di collasso locali. Impatto visivo nullo. Reversibilità possibile con riscaldamento della superficie. Traspirabilità consentita per la disposizione discontinua.



Gli archi della cattedrale di NOTO, in ricostruzione, sono stati rifatti come in origine (prima del crollo) e rinforzati con tecnica di “**plating**” mediante **FRCM** per ridurne la vulnerabilità. L’applicazione punta al contrasto del meccanismo di collasso tipico dell’arco in zona sismica.



L’abside di S.Teresa degli Scalzi a Perugia è stata rinforzata con una cinturazione in FRP; la tecnica rientra nel “**plating**”. Il paramento murario a faccia vista è stato trattato con ricoprimento di **FRP** mimetizzato per colorazione.



L'arco Romano di Rimini, smontato traslato e ricostruito è stato rinforzato con la tecnica "**Bed J R**" (**Bed Joint Revitalising**). Il giunto di allettamento fra le due ghiera dell'arco è stato ricostruito con **FRCM** per contrastare i potenziali meccanismi di collasso dell'arco per azioni sismiche. La particolare vulnerabilità è dovuta alla lacuna nella ghiera superiore e scarso contrasto dei piedritti [11].



Analizziamo più in dettaglio gli aspetti del rinforzo con "plating" di strutture murarie a "beam column".

Si consideri il concio di una "beam column" di muratura - Figura 7 - soggetto allo sforzo normale  $N$ . Il concio è rinforzato su un bordo con materiale composito che si considera perfettamente aderente al supporto e senza rigidità a compressione.

La presenza del rinforzo aderente consente al concio uno stato di tensioni interne (in equilibrio con la sollecitazione) nel quale la muratura è soggetta solo a tensioni di compressione e il rinforzo solo a tensioni di trazione, per qualunque valore dell'eccentricità della forza  $N$ . Sono quindi consentiti anche centri di pressione esterni alla sezione, che in assenza di rinforzo non possono sussistere. Dal punto di vista cinematico, si può quindi pensare che la presenza del rinforzo impedisca la formazione di una cerniera, nel senso specificato al punto 3.

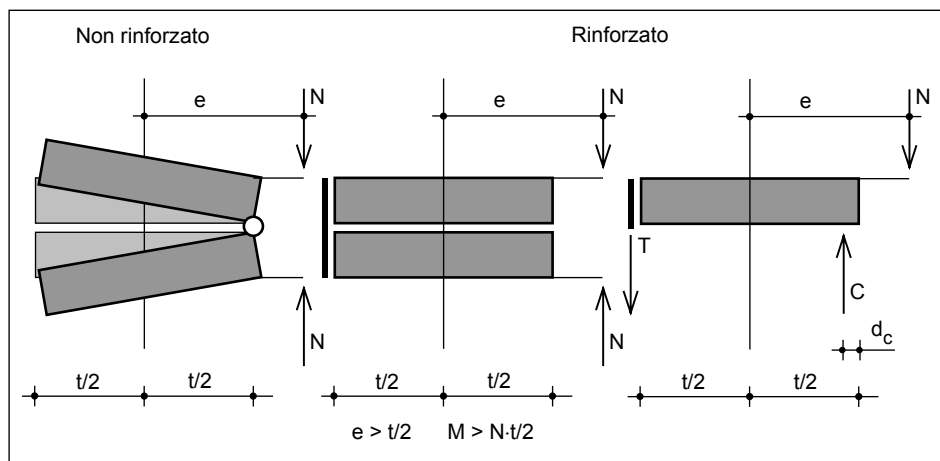


Figura 7: concio di una "beam-column" di muratura.

Essendo l'equilibrio del concio sempre garantito, la sua crisi avviene per raggiungimento del limite di resistenza di uno dei materiali in gioco o dell'interfaccia e quindi può avvenire per:

1. rottura a compressione (schiacciamento) della muratura;
2. rottura a trazione del materiale di rinforzo;
3. delaminazione del rinforzo (crisi all'interfaccia).

La efficacia del rinforzo sussiste solo per eccentricità tali da far uscire il centro di pressione dalla sezione.

In una struttura, il rinforzo (plating) può convenientemente essere disposto in posizione tale da impedire la formazione delle cerniere caratterizzanti il meccanismo di



collasso della struttura non rinforzata. Relativamente alla struttura rinforzata si avrà quindi un diverso meccanismo di collasso ed un conseguente incremento dei carichi di attivazione dello stesso.

## 5 CASO DI STUDIO:

### SISTEMA VOLTA-PIEDRITTI SOGGETTO AD AZIONE SISMICA

Si consideri il sistema di Figura 8 costituito da una volta circolare a botte a tutto sesto impostata su piedritti di spessore variabile. Il rinfiamento è presente solo tra le sezioni di imposta e le sezioni identificate da  $\gamma_r$  e  $\pi - \gamma_r$ .

La presenza del sisma è considerata nello spirito dell'analisi cinematica lineare, come descritta nell'Allegato 11C della normativa [2]. L'azione sismica viene schematizzata come un sistema di forze orizzontali proporzionali ai pesi degli elementi in gioco ed ai carichi verticali attraverso un moltiplicatore del quale si determina il valore che produce il collasso della struttura. In via semplificata, le forze orizzontali si considerano applicate nei baricentri delle masse. Il rinforzo con materiale composito, modificando il meccanismo di collasso, incrementa conseguentemente il valore di detto moltiplicatore nelle condizioni di collasso. Il moltiplicatore di collasso è poi correlato all'accelerazione spettrale di collasso. Si determina quindi l'accelerazione spettrale che produce il collasso del sistema per meccanismo, sia in condizione non rinforzata che in condizione rinforzata all'intradosso con materiale composito.

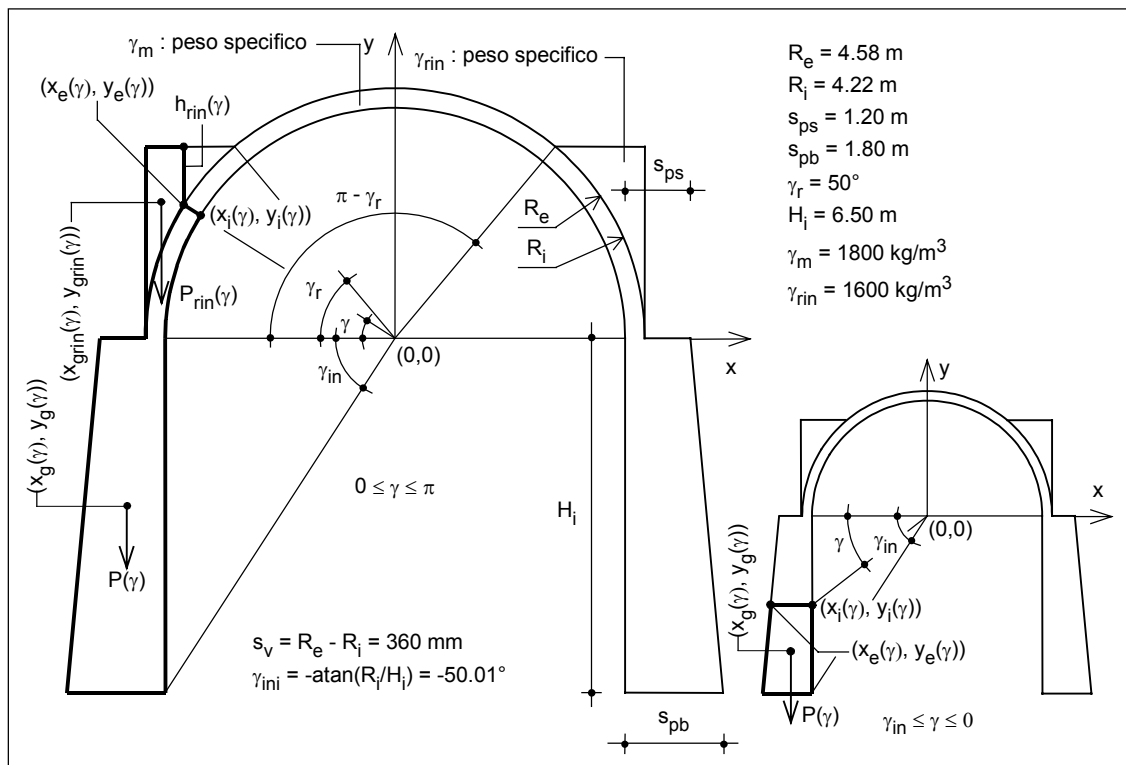


Figura 8: geometria della volta circolare a botte a tutto sesto impostata su piedritti di spessore variabile.

Si considera un sistema di riferimento con origine nel centro della volta. La generica sezione del sistema è identificata dal parametro  $\gamma$ , come mostrato in Figura 8 per i casi  $0 < \gamma < \pi$  e  $\gamma_{in} \leq \gamma \leq 0$  (uno schema analogo vale per  $\pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in}$ ). Siano:

$$P_p = \gamma_m \cdot \frac{s_{ps} + s_{pb}}{2} \cdot H_i = 172.11 \frac{kN}{m} \quad P_v = \gamma_m \cdot \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} \cdot \pi = 87.84 \frac{kN}{m} \quad (1)$$

rispettivamente il peso di ciascun piedritto ed il peso della volta; siano inoltre:

$$x_{gp} = -R_i - \frac{\gamma_m}{P_p} \cdot H_i \cdot \left( \frac{s_{ps}^2}{2} + \frac{s_{pb} - s_{ps}}{2} \cdot \frac{s_{pb} + 2s_{ps}}{3} \right) = -4.98 \text{ m}$$

$$y_{gp} = -H_i + \frac{\gamma_m}{P_p} \cdot H_i^2 \cdot \frac{s_{pb} + 2s_{ps}}{6} = -3.47 \text{ m} \quad (2)$$

$$y_{gv} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} = 2.80 \text{ m}$$

rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del baricentro del volume del piedritto di sinistra e l'ordinata del baricentro del volume della volta. Le funzioni dell'anomalia  $\gamma$ , utilizzate nel seguito della trattazione, sono definite in Appendice.

### 5.1 Analisi Limite della struttura non rinforzata

Con riferimento alla Figura 9, si cerca il moltiplicatore  $\lambda_c$  dei pesi, pensati agenti in direzione orizzontale, che produce il collasso per meccanismo cinematico della struttura.

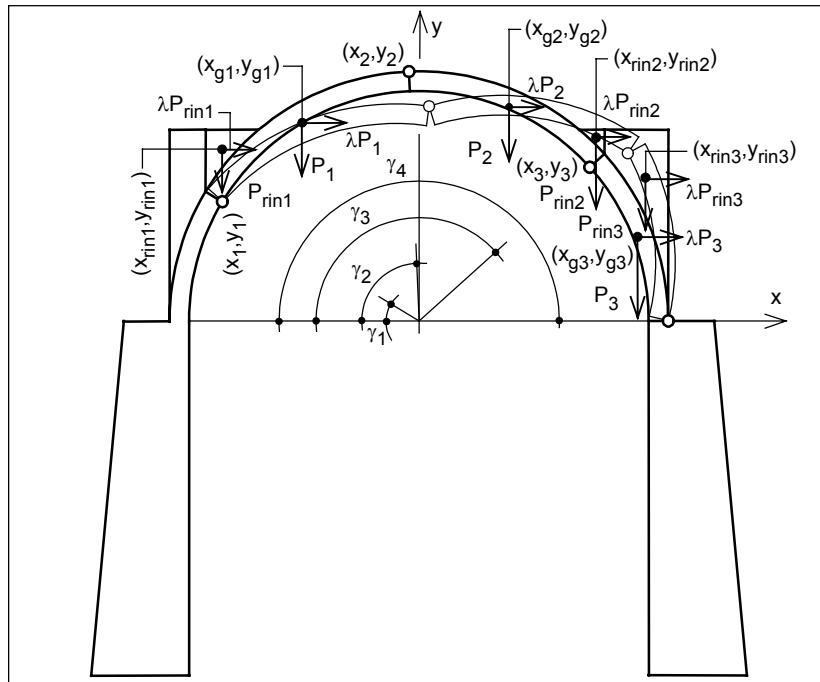


Figura 9: ipotesi di meccanismo di collasso.

Si considera il meccanismo di collasso identificato dalle cerniere nelle sezioni:

$$\gamma_1 = 31.21^\circ \quad \gamma_2 = 87.69^\circ \quad \gamma_3 = 138.04^\circ \quad \gamma_4 = 180^\circ \quad (3)$$

Utilizzando le (a.1), si determinano le coordinate delle cerniere:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_i(\gamma_1) = -3.61 \text{ m} & y_1 &= y_i(\gamma_1) = 2.19 \text{ m} \\ x_2 &= x_e(\gamma_2) = -0.18 \text{ m} & y_2 &= y_e(\gamma_2) = 4.58 \text{ m} \\ x_3 &= x_i(\gamma_3) = 3.14 \text{ m} & y_3 &= y_i(\gamma_3) = 2.82 \text{ m} \\ x_4 &= x_e(\gamma_4) = 4.58 \text{ m} & y_4 &= y_e(\gamma_4) = 0.00 \text{ m} \end{aligned} \quad (4)$$

I pesi dei tre conci coinvolti nel meccanismo di collasso (Figura 9) si determinano utilizzando le (a.3), mentre le coordinate dei punti di applicazione di detti pesi si trovano con le (a.4) e (a.5) e valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(\gamma_2) - P(\gamma_1) = 27.56 \text{ kN/m} \\ P_2 &= P(\gamma_3) - P(\gamma_2) = 24.57 \text{ kN/m} \\ P_3 &= P(\gamma_4) - P(\gamma_3) = 20.48 \text{ kN/m} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x_{g1} &= \frac{x_g(\gamma_2) \cdot P(\gamma_2) - x_g(\gamma_1) \cdot P(\gamma_1)}{P_1} = -2.15 \text{ m} \\ y_{g1} &= \frac{y_g(\gamma_2) \cdot P(\gamma_2) - y_g(\gamma_1) \cdot P(\gamma_1)}{P_1} = 3.64 \text{ m} \\ x_{g2} &= \frac{x_g(\gamma_3) \cdot P(\gamma_3) - x_g(\gamma_2) \cdot P(\gamma_2)}{P_2} = 1.66 \text{ m} \\ y_{g2} &= \frac{y_g(\gamma_3) \cdot P(\gamma_3) - y_g(\gamma_2) \cdot P(\gamma_2)}{P_2} = 3.93 \text{ m} \\ x_{g3} &= \frac{x_g(\gamma_4) \cdot P(\gamma_4) - x_g(\gamma_3) \cdot P(\gamma_3)}{P_3} = 4.02 \text{ m} \\ y_{g3} &= \frac{y_g(\gamma_4) \cdot P(\gamma_4) - y_g(\gamma_3) \cdot P(\gamma_3)}{P_3} = 1.54 \text{ m} \end{aligned} \quad (6)$$

I pesi del rinfiacco, relativi ai tre conci (Figura 9), si determinano con le (a.6), mentre le coordinate dei punti di applicazione di detti pesi si determinano con le (a.7):

$$\begin{aligned} P_{rin1} &= P_{rin}(\gamma_2) - P_{rin}(\gamma_1) = 7.70 \text{ kN/m} \\ P_{rin2} &= P_{rin}(\gamma_3) - P_{rin}(\gamma_2) = 1.54 \text{ kN/m} \\ P_{rin3} &= P_{rin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_3) = 25.94 \text{ kN/m} \end{aligned} \quad (7)$$

$$x_{rin1} = \frac{x_{grin}(\gamma_2) \cdot P_{rin}(\gamma_2) - x_{grin}(\gamma_1) \cdot P_{rin}(\gamma_1)}{P_{rin1}} = -3.61 \text{ m} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 y_{rin1} &= \frac{y_{grin}(\gamma_2) \cdot P_{rin}(\gamma_2) - y_{grin}(\gamma_1) \cdot P_{rin}(\gamma_1)}{P_{rin1}} = 3.15 \text{ m} \\
 x_{rin2} &= \frac{x_{grin}(\gamma_3) \cdot P_{rin}(\gamma_3) - x_{grin}(\gamma_2) \cdot P_{rin}(\gamma_2)}{P_{rin2}} = 3.26 \text{ m} \\
 y_{rin2} &= \frac{y_{grin}(\gamma_3) \cdot P_{rin}(\gamma_3) - y_{grin}(\gamma_2) \cdot P_{rin}(\gamma_2)}{P_{rin2}} = 3.36 \text{ m} \\
 x_{rin3} &= \frac{x_{grin}(\gamma_4) \cdot P_{rin}(\gamma_4) - x_{grin}(\gamma_3) \cdot P_{rin}(\gamma_3)}{P_{rin3}} = 4.16 \text{ m} \\
 y_{rin3} &= \frac{y_{grin}(\gamma_4) \cdot P_{rin}(\gamma_4) - y_{grin}(\gamma_3) \cdot P_{rin}(\gamma_3)}{P_{rin3}} = 2.62 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Si impone l'equilibrio del sistema via principio dei lavori virtuali. Il sistema è in equilibrio finché è soddisfatta la diseuguaglianza:

$$\sum_{i=1}^3 P_i \cdot \eta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \eta_{rini} + \lambda \cdot \left( \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini} \right) \leq 0 \quad (9)$$

In cui, con riferimento alla Figura 10, gli spostamenti verticali e orizzontali dei punti di applicazione delle forze sono:

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \varphi_1 \cdot (x_{g1} - x_1) = 1.46 \cdot \varphi_1 & \delta_1 &= \varphi_1 \cdot (y_{g1} - y_1) = 1.45 \cdot \varphi_1 \\
 \eta_2 &= \varphi_2 \cdot (x_{g2} - x_{2ass}) = -0.10 \cdot \varphi_1 & \delta_2 &= \varphi_2 \cdot (y_{g2} - y_{2ass}) = 3.63 \cdot \varphi_1 \\
 \eta_3 &= \varphi_3 \cdot (x_{g3} - x_4) = -1.14 \cdot \varphi_1 & \delta_3 &= \varphi_3 \cdot (y_{g3} - y_4) = 3.14 \cdot \varphi_1 \\
 \eta_{rin1} &= \varphi_1 \cdot (x_{rin1} - x_1) \cong 0 & \delta_{rin1} &= \varphi_1 \cdot (y_{rin1} - y_1) = 0.96 \cdot \varphi_1 \\
 \eta_{rin2} &= \varphi_2 \cdot (x_{rin2} - x_{2ass}) = -3.16 \cdot \varphi_1 & \delta_{rin2} &= \varphi_2 \cdot (y_{rin2} - y_{2ass}) = 4.71 \cdot \varphi_1 \\
 \eta_{rin3} &= \varphi_3 \cdot (x_{rin3} - x_4) = -0.86 \cdot \varphi_1 & \delta_{rin3} &= \varphi_3 \cdot (y_{rin3} - y_4) = 5.35 \cdot \varphi_1
 \end{aligned} \quad (10)$$

essendo  $(x_{2ass}, y_{2ass})$  le coordinate del centro di rotazione assoluta del secondo concio:

$$\begin{aligned}
 x_{2ass} &= \frac{y_3 - y_1 + x_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - x_3 \cdot \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}}{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}} = 1.604 \text{ m} \\
 y_{2ass} &= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_{2ass} - x_1) = 5.824 \text{ m}
 \end{aligned} \quad (11)$$

e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  le rotazioni del secondo e terzo concio:

$$\varphi_2 = -\varphi_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_{2ass} - x_2} - 1.915 \varphi_1 \quad \varphi_3 = \varphi_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_{2ass} - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_{2ass}}{x_4 - x_3} = 2.308 \varphi_1 \quad (12)$$

Il moltiplicatore di collasso relativo al meccanismo considerato è dato dalla (9) con il segno di uguaglianza, ossia:

$$\lambda_c = - \frac{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot \eta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \eta_{rini}}{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini}} = 0.0366 \quad (13)$$

Naturalmente il moltiplicatore trovato dipende dalla scelta iniziale del meccanismo di collasso, rappresentato dalle posizioni  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$  delle cerniere. L'effettivo moltiplicatore di collasso è il minimo tra tutti quelli associati ai diversi meccanismi di collasso cinematicamente ammissibili e quindi tra tutti quelli associati alle quaterne  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  e  $\gamma_4$ . Si verifica facilmente che il moltiplicatore (13) trovato è in effetti il minimo tra tutti quelli associati a meccanismi di collasso cinematicamente ammissibili e pertanto è quello effettivo di collasso.

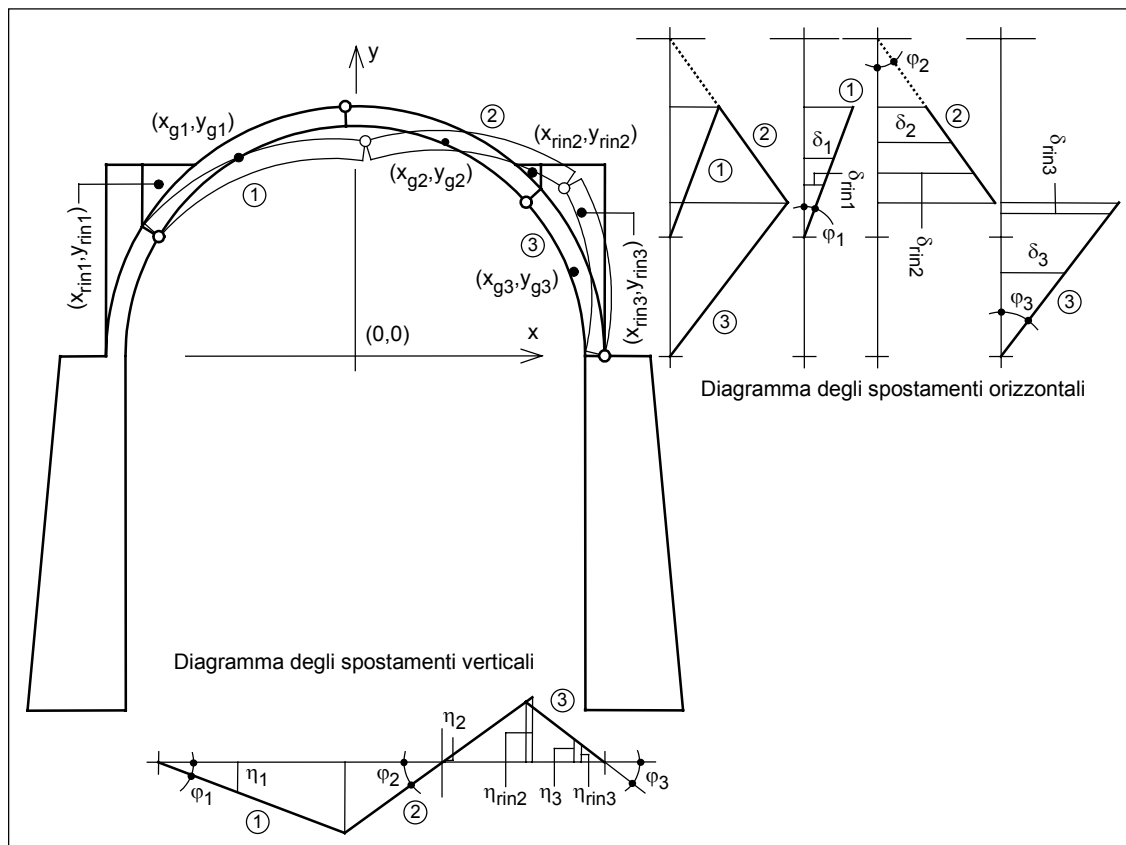


Figura 10: spostamenti relativi al meccanismo considerato.

I diagrammi dello sforzo normale (considerato positivo se di compressione) e del momento flettente, valutato rispetto all'estradosso, relativi al meccanismo di collasso ed al corrispondente moltiplicatore  $\lambda_c = 0.0366$  sono descritti dalle relazioni:

$$N(\gamma) = [R_{vs} - (P(\gamma) + P_{rin}(\gamma) - P(\gamma_1) - P_{rin}(\gamma_1))] \cdot \cos \psi(\gamma) + [H_s + \lambda_c \cdot (P(\gamma) + P_{rin}(\gamma) - P(\gamma_1) - P_{rin}(\gamma_1))] \cdot \sin \psi(\gamma) \quad (14)$$

$$M(\gamma) = R_{vs} \cdot (x_e(\gamma) - x_l) - H_s \cdot (y_e(\gamma) - y_l) + \left[ (P(\gamma) - P(\gamma_1)) \cdot \left( x_e(\gamma) - \frac{x_g(\gamma) \cdot P(\gamma) - x_g(\gamma_1) \cdot P(\gamma_1)}{P(\gamma) - P(\gamma_1)} \right) \right] + \left[ (P_{rin}(\gamma) - P_{rin}(\gamma_1)) \cdot \left( x_e(\gamma) - \frac{x_{grin}(\gamma) \cdot P_{rin}(\gamma) - x_{grin}(\gamma_1) \cdot P_{rin}(\gamma_1)}{P_{rin}(\gamma) - P_{rin}(\gamma_1)} \right) \right] + \left[ -\lambda_c \cdot \left[ (P(\gamma) - P(\gamma_1)) \cdot \left( y_e(\gamma) - \frac{y_g(\gamma) \cdot P(\gamma) - y_g(\gamma_1) \cdot P(\gamma_1)}{P(\gamma) - P(\gamma_1)} \right) \right] + (P_{rin}(\gamma) - P_{rin}(\gamma_1)) \cdot \left( y_e(\gamma) - \frac{y_{grin}(\gamma) \cdot P_{rin}(\gamma) - y_{grin}(\gamma_1) \cdot P_{rin}(\gamma_1)}{P_{rin}(\gamma) - P_{rin}(\gamma_1)} \right) \right] \quad (15)$$

essendo  $R_{vs}$  e  $H_s$  le reazioni vincolari nella prima cerniera (Figura 11), determinabili risolvendo il sistema di equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} R_{vs} \cdot (x_2 - x_1) - H_s \cdot (y_2 - y_1) = P_1 \cdot (x_2 - x_{g1}) + P_{rin1} \cdot (x_2 - x_{rin1}) + \lambda_c \cdot [P_1 \cdot (y_2 - y_{g1}) + P_{rin1} \cdot (y_2 - y_{rin1})] \\ R_{vd} \cdot (x_4 - x_2) - H_d \cdot (y_2 - y_4) = P_2 \cdot (x_{g2} - x_2) + P_3 \cdot (x_{g3} - x_2) + P_{rin2} \cdot (x_{rin2} - x_2) + P_{rin3} \cdot (x_{rin3} - x_2) + \lambda_c \cdot [P_2 \cdot (y_{g2} - y_2) + P_{rin2} \cdot (y_{rin2} - y_2) + P_3 \cdot (y_{g3} - y_2) + P_{rin3} \cdot (y_{rin3} - y_2)] \\ R_{vs} + R_{vd} = P(\gamma_4) - P(\gamma_1) + P_{rin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_1) \\ H_s - H_d = -\lambda_c \cdot [P(\gamma_4) - P(\gamma_1) + P_{rin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_1)] \end{cases} \quad (16)$$

Dette reazioni valgono:

$$\begin{cases} R_{vs} = 36.01 \text{ kN/m} \\ R_{vd} = 71.79 \text{ kN/m} \end{cases} \quad \begin{cases} H_s = 17.36 \text{ kN/m} \\ H_d = 21.30 \text{ kN/m} \end{cases} \quad (17)$$

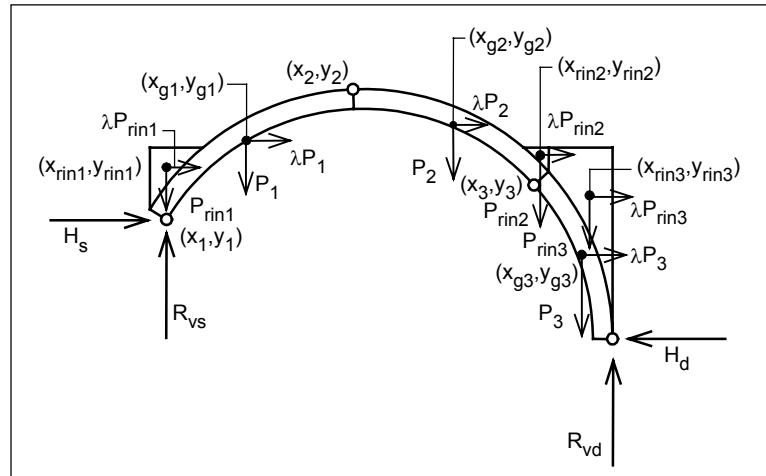


Figura 11: reazioni vincolari nelle cerniere estreme

Il luogo dei centri di pressione è descritto dalle distanze dei centri di pressione dall'estradosso:

$$u(\gamma) = \frac{M(\gamma)}{N(\gamma)} \quad (18)$$

tracciate in Figura 12. Equivalentemente, detto luogo può essere rappresentato nel piano  $xy$  (Figura 13), essendo descritto dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_p(\gamma) = x_e(\gamma) - u(\gamma) \cdot \cos \psi(\gamma) \\ y_p(\gamma) = y_e(\gamma) + u(\gamma) \cdot \sin \psi(\gamma) \end{cases} \quad (19)$$

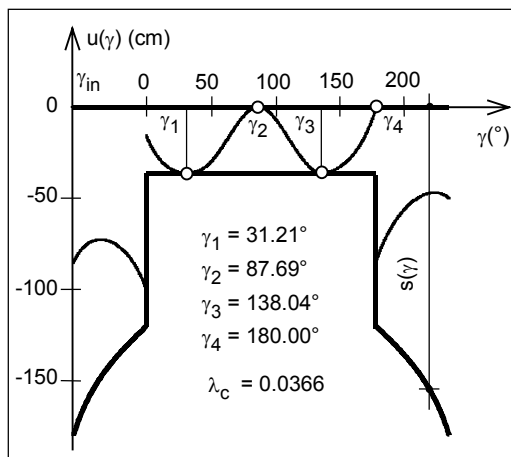


Figura 12: luogo dei centri di pressione

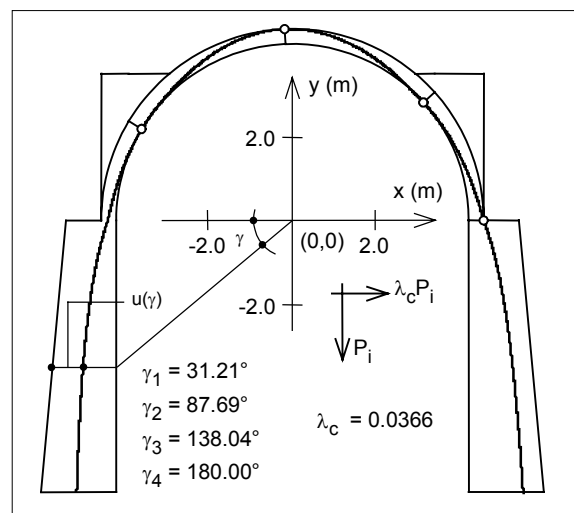


Figura 13: luogo dei centri di pressione

Si osserva come il luogo dei centri di pressione relativo alla condizione di collasso risulti tangente quattro volte, nelle posizioni delle cerniere, la bordo del sistema.

Il peso totale delle masse in gioco è:

$$P_{tot} = P(\gamma_4) - P(\gamma_1) + P_{rin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_1) = 107.80 \text{ kN/m} \quad (20)$$

Il baricentro delle masse in gioco ha ordinata:

$$y_{tot} = \frac{P(\gamma_4) \cdot y_g(\gamma_4) - P(\gamma_1) \cdot y_g(\gamma_1)}{P_{tot}} + \frac{P_{rin}(\gamma_4) \cdot y_{grin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_1) \cdot y_{grin}(\gamma_1)}{P_{tot}} = 3.02 \text{ m} \quad (21)$$

Seguendo l'impostazione di [2], la massa partecipante vale:

$$M^* = \frac{\left( \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini} \right)^2}{g \left( \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i^2 + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini}^2 \right)} = \frac{88.06 \text{ kN}}{g \text{ m}} \quad (22)$$

e corrisponde alla frazione di massa partecipante:

$$e^* = \frac{g \cdot M^*}{P_{tot}} = 0.817 \quad (23)$$

L'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo è quindi:

$$a_0^* = \frac{\lambda_c g}{e^*} = 0.045 \text{ g} \quad (24)$$

## 5.2 Analisi FEM

In questo paragrafo vengono presentati i risultati di una analisi ad elementi finiti lineare eseguita sulla volta a botte precedentemente descritta, al fine di ottenere una valutazione iniziale della più probabile posizione di apertura delle cerniere.

Scopo di tale analisi è quello di illustrare un possibile approccio al problema dello studio dei meccanismi di collasso di sistemi strutturali. In generale la possibilità di eseguire analisi lineari preliminari dell'intero complesso strutturale fornisce uno strumento semplice ed affidabile in grado di supportare il progettista nell'individuazione delle zone critiche. Tale procedura, se utilizzata in fase iniziale dello studio, è in grado di guidare la scelta dei macroelementi da considerare nelle analisi di dettaglio e, nell'ambito del singolo macroelemento (quale potrebbe essere il semplice caso in esame) identificare le zone dalle quali partire per l'analisi limite, imponendo sin da subito una posizione delle cerniere che si presume sarà prossima alla posizione effettiva.

In Figura 14 si riporta la mesh ad elementi finiti della volta utilizzata nell'analisi.



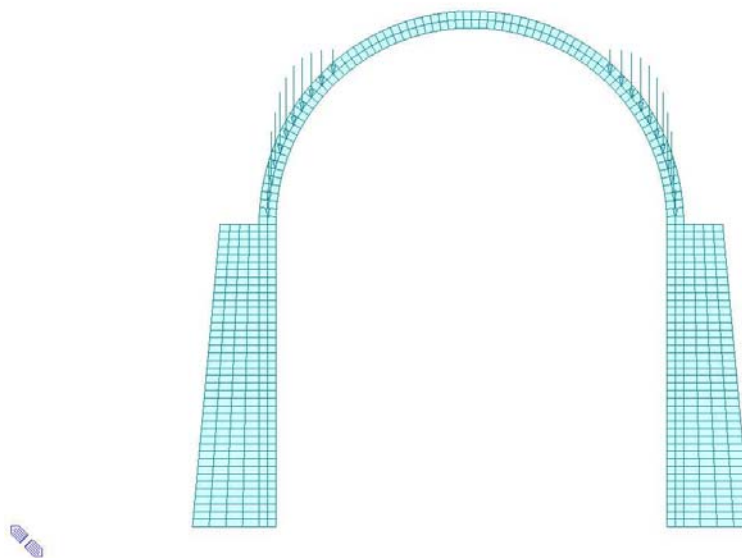


Figura 14: mesh ad elementi finiti dell'arco e posizione dei carichi dovuti al rinfianco

In Figura 15 si riporta la mappa delle tensioni di trazione (avendo applicato un filtro che rende incolore la zona con tensione di compressione) per un carico orizzontale ottenuto con moltiplicatore pari a 0.036, sia in situazione indeformata che deformata. Si tratta delle tensioni circonferenziali massime, che identificano le zone ove presumibilmente si avrà l'apertura delle cerniere.

Ipotizzando l'apertura della cerniera in corrispondenza al picco di trazione, in Figura 16 sono riportati i valori degli angoli corrispondenti, da confrontare con quelli ottenuti dall'analisi limite. Le analisi sono state eseguite con diverse condizioni di vincolo e per diversi moltiplicatori del carico orizzontale. Si è osservata una limitata variabilità della posizione delle cerniere: per una modifica del 200%-300% del moltiplicatore dei carichi la posizione delle cerniere varia approssimativamente del 15%-20%. Tale variazione si ritiene più che accettabile, visto che lo scopo di un'analisi lineare di questo tipo è sostanzialmente quello di consentire l'individuazione di una posizione iniziale delle zone critiche che sia il più possibile vicina alla posizione di minimo. In Figura 17 si riporta a titolo di esempio il risultato di un'analisi eseguita ipotizzando l'arco vincolato alla base. Si osserva una variabilità del tutto trascurabile nella posizione delle cerniere.

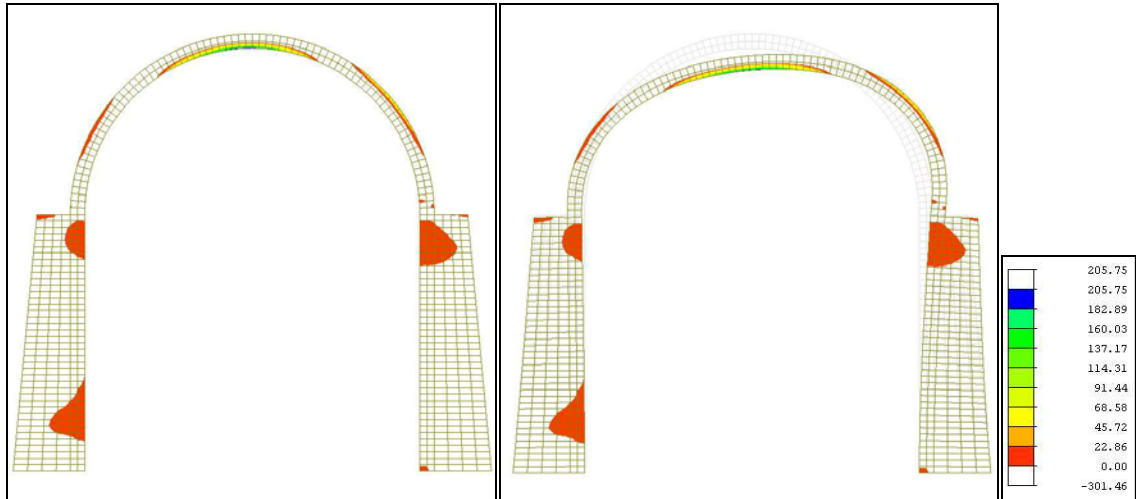


Figura 15: Arco con piedritti: mappa delle trazioni ( $kN/m^2$ )– situazione indeformata e deformata

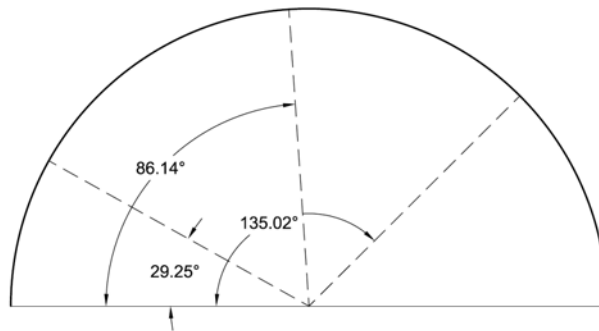


Figura 16: Arco con piedritti: angoli corrispondenti alle massime trazioni

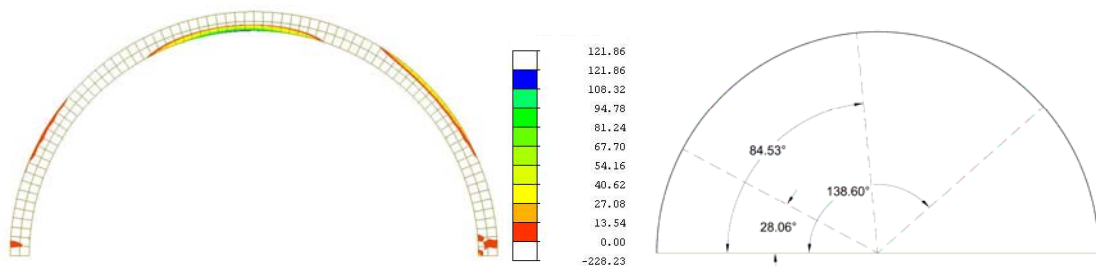


Figura 17: Arco incastrato al piede: mappa delle trazioni ( $kN/m^2$ ) – angoli corrispondenti alle massime trazioni

### 5.3 Analisi Limite della struttura rinforzata

Con l'intenzione di impedire la formazione della cerniera identificata da  $\gamma_2$  (Figura 9) si considera la configurazione di rinforzo intradossale di Figura 18.

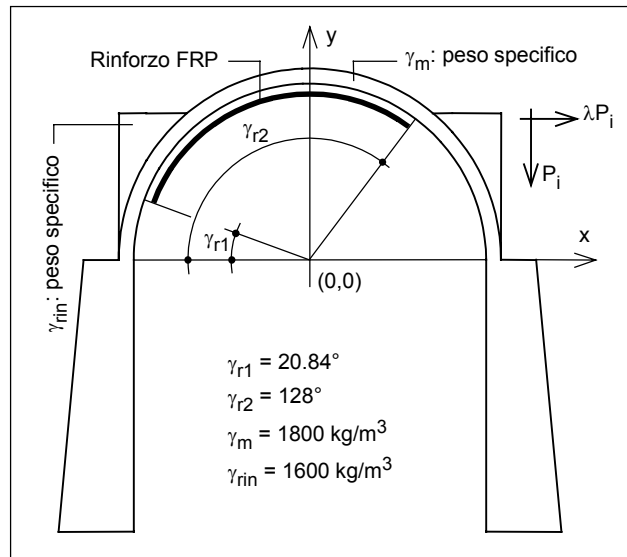
Il moltiplicatore di collasso  $\lambda_{cR}$  della struttura rinforzata si determina minimizzando la (13) rispetto alle variabili  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ , tenendo presente che la cerniera identificata da  $\gamma_2$  non può formarsi in estradosso nelle sezioni rinforzate. Il minimo della (13) va pertanto cercato tenendo conto del vincolo:

$$\gamma_{ini} \leq \gamma_2 \leq \gamma_{r1} \qquad \gamma_{r2} \leq \gamma_2 \leq \pi - \gamma_{ini} \qquad (25)$$

Le posizioni delle cerniere che minimizzano il moltiplicatore di collasso relativamente alla struttura rinforzata sono:

$$\gamma_1 = 0^\circ \qquad \gamma_2 = \gamma_{r1} = 20.84^\circ \qquad \gamma_3 = 150.26^\circ \qquad \gamma_4 = 180.0^\circ \qquad (26)$$

alle quali corrisponde il meccanismo cinematico di collasso di Figura 19.



*Figura 18: configurazione di rinforzo.*

Le quantità (pesi e coordinate) relative al meccanismo di collasso della struttura rinforzata si determinano ancora con le (a.1) – (a.8), nelle quali si introducono le posizioni delle cerniere (26). Relativamente al meccanismo di collasso della struttura rinforzata si hanno quindi le coordinate delle cerniere:

$$\begin{matrix} x_1 = -4.22 \text{ m} & x_2 = -4.28 \text{ m} & x_3 = 3.66 \text{ m} & x_4 = 4.58 \text{ m} \\ y_1 = 0.00 \text{ m} & y_2 = 1.63 \text{ m} & y_3 = 2.09 \text{ m} & y_4 = 0.00 \text{ m} \end{matrix} \qquad (27)$$

I pesi dei conci e le coordinate dei punti di applicazione di questi sono:

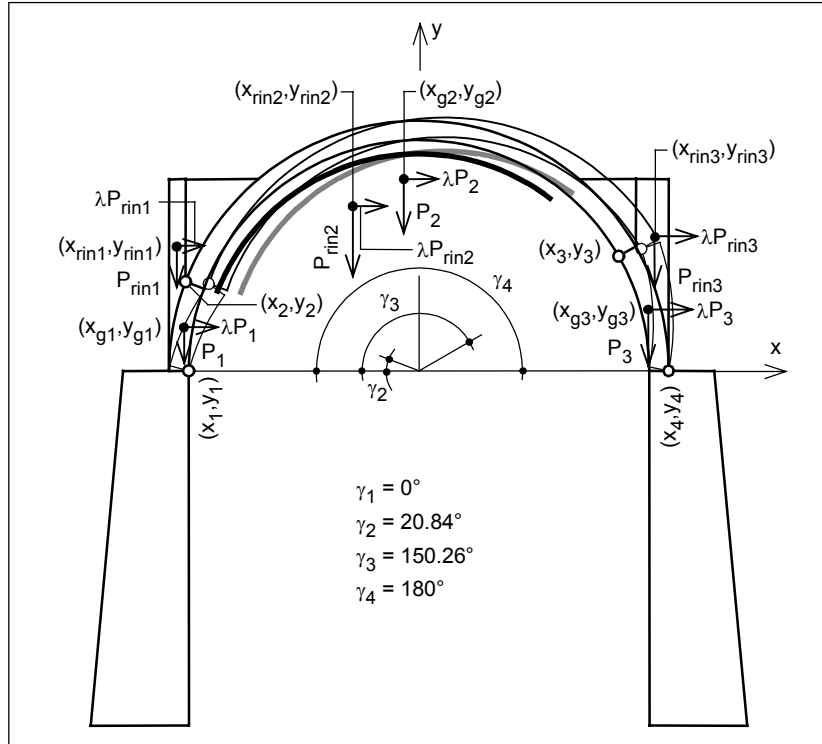
$$P_1 = 10.17 \text{ kN/m} \qquad P_2 = 63.16 \text{ kN/m} \qquad P_3 = 14.51 \text{ kN/m} \qquad (28)$$

$$\begin{matrix} x_{g1} = -4.31 \text{ m} & x_{g2} = -0.27 \text{ m} & x_{g3} = 4.21 \text{ m} \\ y_{g1} = 0.79 \text{ m} & y_{g2} = 3.51 \text{ m} & y_{g3} = 1.12 \text{ m} \end{matrix} \qquad (29)$$

I pesi di rinfiaccio relativi ai tre conci e le coordinate dei punti di applicazione di detti pesi sono:

$$P_{rin1} = 1.35 \text{ kN/m} \quad P_{rin2} = 24.95 \text{ kN/m} \quad P_{rin3} = 18.67 \text{ kN/m} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} x_{rin1} &= -4.44 \text{ m} & x_{rin2} &= -1.21 \text{ m} & x_{rin3} &= 4.32 \text{ m} \\ y_{rin1} &= 2.27 \text{ m} & y_{rin2} &= 3.01 \text{ m} & y_{rin3} &= 2.45 \text{ m} \end{aligned} \quad (31)$$



*Figura 19: meccanismo di collasso della struttura rinforzata.*

Il centro di rotazione assoluta ha coordinate (ottenute ancora con le (11) nelle quali sono introdotte le coordinate delle cerniere (27)):

$$x_{2ass} = -5.034 \text{ m} \quad y_{2ass} = 21.279 \text{ m} \quad (32)$$

Con riferimento alla Figura 20, gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze sono:

$$\begin{aligned} \eta_I &= -0.09 \cdot \varphi_I & \eta_2 &= -0.38 \cdot \varphi_I & \eta_3 &= -0.28 \cdot \varphi_I \\ \eta_{rin1} &= -0.22 \cdot \varphi_I & \eta_{rin2} &= -0.31 \cdot \varphi_I & \eta_{rin3} &= -0.19 \cdot \varphi_I \\ \delta_I &= 0.79 \cdot \varphi_I & \delta_2 &= 1.48 \cdot \varphi_I & \delta_3 &= 0.85 \cdot \varphi_I \\ \delta_{rin1} &= 2.27 \cdot \varphi_I & \delta_{rin2} &= 1.52 \cdot \varphi_I & \delta_{rin3} &= 1.86 \cdot \varphi_I \end{aligned} \quad (33)$$

La dipendenza tra le rotazioni del secondo e terzo concio e la rotazione del primo concio è espressa ancora dalle (12) in cui le coordinate delle cerniere sono quelle del meccanismo di collasso della struttura rinforzata.

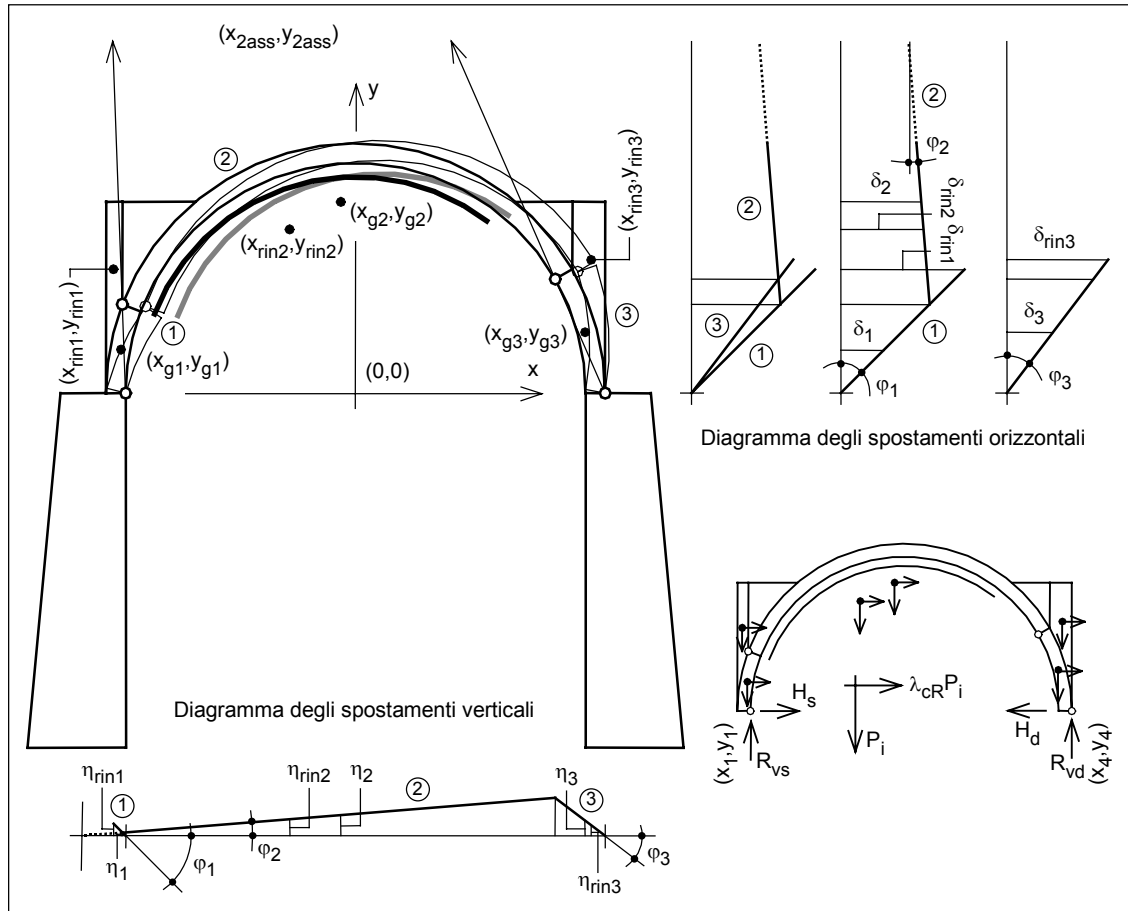


Figura 20: spostamenti e reazioni vincolari.

Infine, il moltiplicatore di collasso della struttura rinforzata è:

$$\lambda_{cR} = - \frac{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot \eta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \eta_{rini}}{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini}} = 0.20200 \quad (34)$$

Sempre con riferimento alla Figura 20, introducendo nel sistema (16) le quantità relative al meccanismo di collasso (26), si trovano le reazioni:

$$\begin{cases} R_{vs} = 65.31 \text{ kN/m} \\ R_{vd} = 77.50 \text{ kN/m} \end{cases} \quad \begin{cases} H_s = -3.87 \text{ kN/m} \\ H_d = 24.98 \text{ kN/m} \end{cases} \quad (35)$$

Gli andamenti del momento flettente (valutato rispetto alla linea di estradosso) e dello sforzo normale (ottenuti inserendo le reazioni (35) nelle espressioni (14) e (15)) sono tracciati in Figura 21 ed in Figura 22.

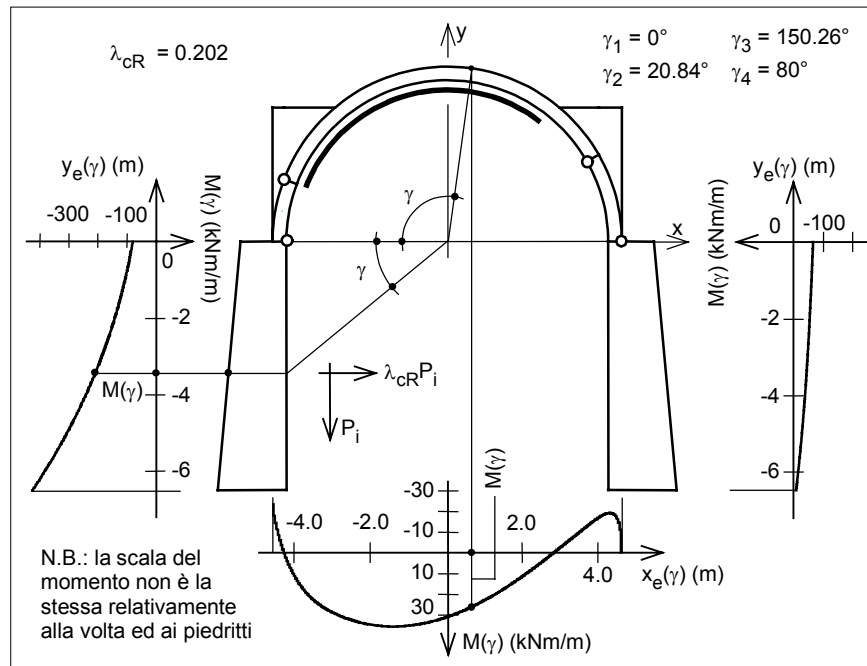


Figura 21: diagramma del momento flettente (valutato rispetto alla linea di estradosso).

Il luogo dei centri di pressione, definito dalla (18) in cui siano introdotte le sollecitazioni rappresentate in Figura 21 ed in Figura 22, è tracciato in Figura 23 ed in Figura 24.

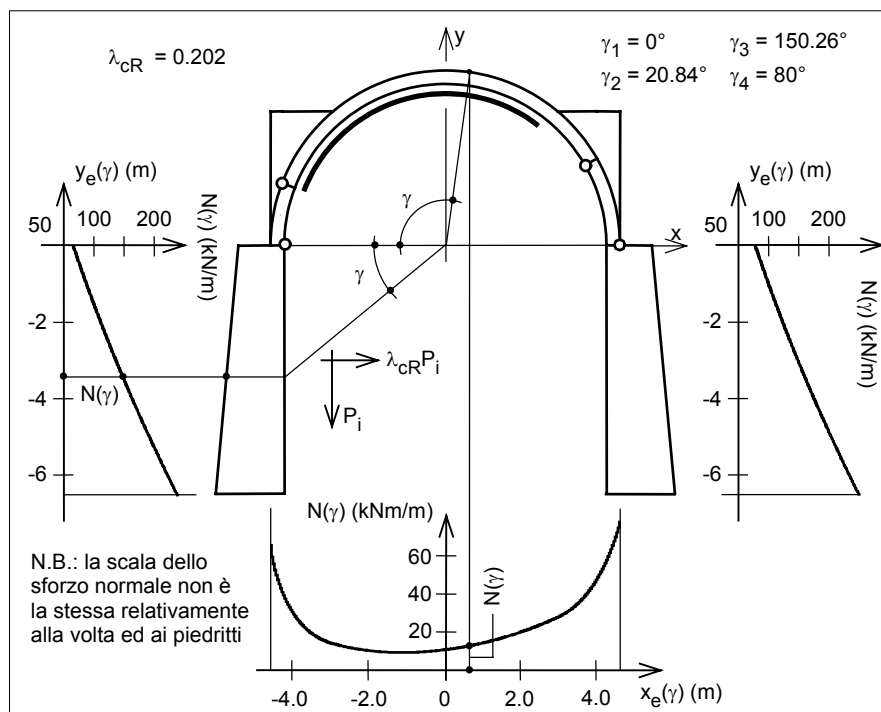


Figura 22: diagramma dello sforzo normale (positive le compressioni).

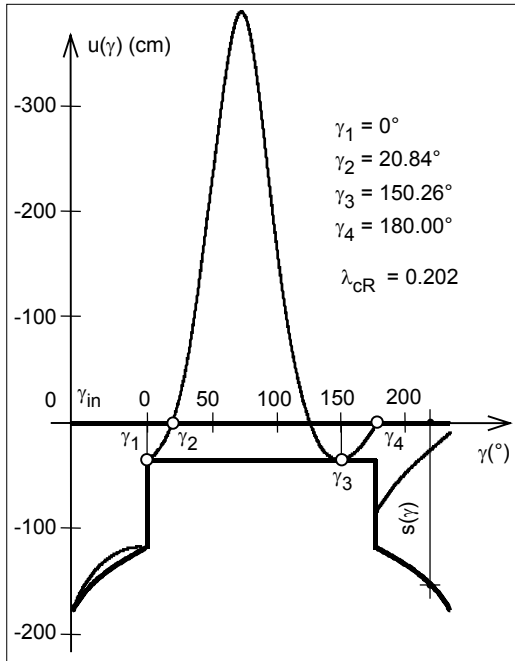


Figura 23: luogo dei centri di pressione.

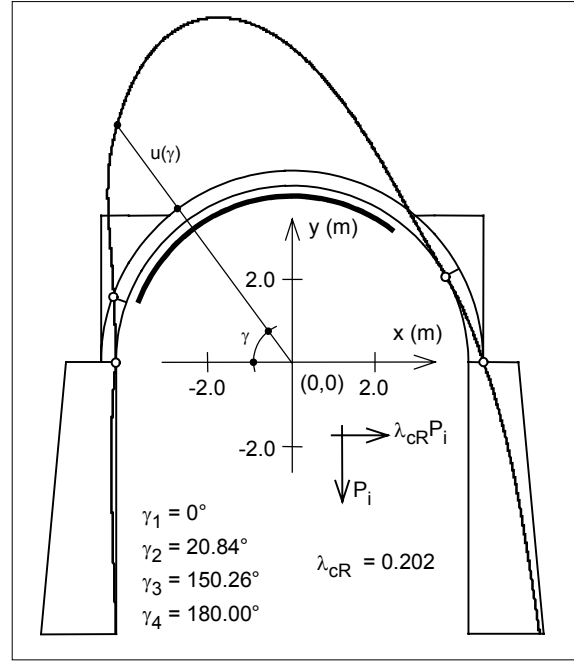


Figura 24: luogo dei centri di pressione.

Il peso totale delle masse in gioco e l'ordinata del baricentro di dette masse sono:

$$P_{tot} = P(\gamma_4) - P(\gamma_1) + P_{rin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_1) = 142.81 \text{ kN/m} \quad (36)$$

$$y_{tot} = \frac{P(\gamma_4) \cdot y_g(\gamma_4) - P(\gamma_1) \cdot y_g(\gamma_1)}{P_{tot}} + \frac{P_{rin}(\gamma_4) \cdot y_{grin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_1) \cdot y_{grin}(\gamma_1)}{P_{tot}} = 2.75 \text{ m} \quad (37)$$

La massa partecipante vale:

$$M^* = \frac{\left( \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini} \right)^2}{g \left( \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i^2 + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini}^2 \right)} = \frac{134.11 \text{ kN}}{g \text{ m}} \quad (38)$$

alla quale corrisponde la frazione di massa partecipante:

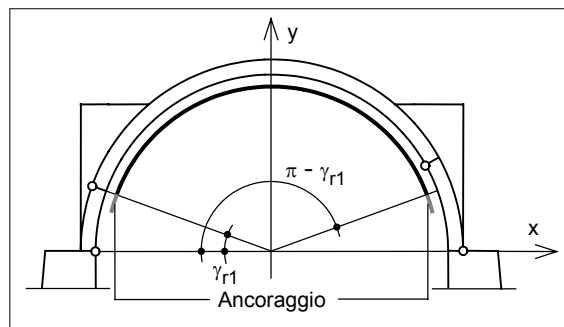
$$e^* = \frac{g \cdot M^*}{P_{tot}} = 0.939 \quad (39)$$

L'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo è quindi:

$$a_0^* = \frac{\lambda_c g}{e^*} = 0.215 g \tag{40}$$

Si ha quindi un notevolissimo incremento dell'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo rispetto al caso senza rinforzo.

Naturalmente è poi necessario prevedere una certa lunghezza di ancoraggio tra la sezione identificata da  $\gamma_1$  e la sezione di imposta, per fare in modo che il rinforzo sia "attivo" subito a destra della sezione  $\gamma_1$ . Per il carattere oscillatorio dell'azione sismica, il rinforzo deve inoltre essere disposto in modo simmetrico (Figura 25).

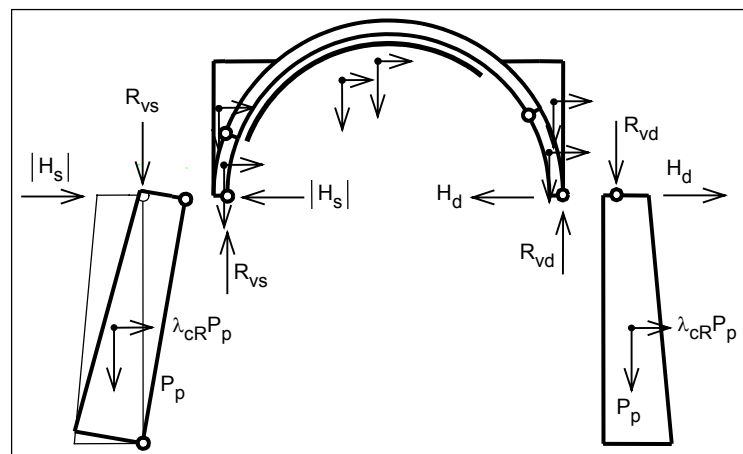


*Figura 25: disposizione di rinforzo.*

Si osserva che per la configurazione di rinforzo considerata, e quindi per il conseguente meccanismo di collasso, il centro di pressione raggiunge il lembo della sezione di base del piedritto sinistro, essendo:

$$u(\gamma_{ini}) = -1.8 m = -s_{pb} \tag{41}$$

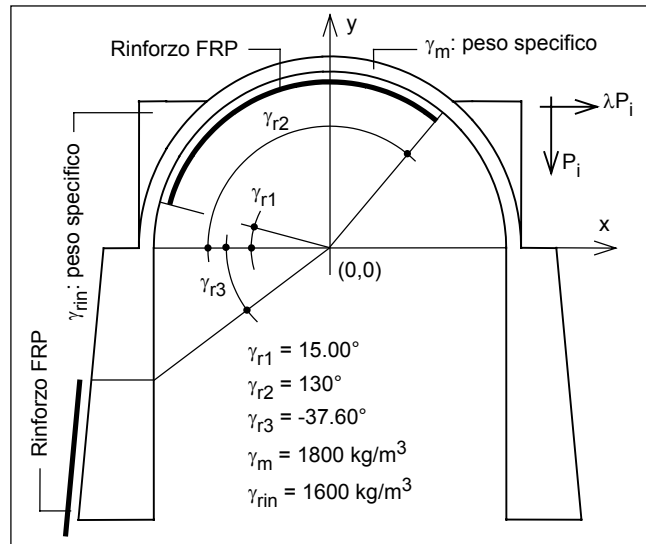
Per le forze orizzontali di meccanismo (moltiplicatore (34)) detto piedritto si trova quindi nella condizione limite di ribaltamento (Figura 26). Un prolungamento del rinforzo dalla parte sinistra, nel tentativo di incrementare ancora il moltiplicatore di collasso diminuendo  $\gamma_2$ , comporta quindi la necessità di rinforzare contestualmente la parte esterna del piedritto di sinistra.





*Figura 26: collasso di un piedritto.*

Si consideri ad esempio la configurazione di rinforzo di Figura 27, nella quale il rinforzo intradossale della volta è prolungato fino alla sezione identificata da  $\gamma_{r1} = 15^\circ$  e si introduce un ulteriore rinforzo sulla superficie esterna del piedritto di sinistra. Quest'ultimo rinforzo si pensa ancorato alla fondazione ed esteso fino a metà altezza del piedritto, e quindi fino alla sezione identificata da  $\gamma_{r3} = -37.60^\circ$ .



*Figura 27: configurazione di rinforzo coinvolgente i piedritti.*

Il meccanismo di collasso che minimizza il moltiplicatore (13) tenendo conto dei vincoli:

$$\gamma_{ini} \leq \gamma_1 \leq \gamma_{r3} \qquad \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_{r1} \qquad \gamma_{r2} \leq \gamma_2 \leq \pi - \gamma_{ini} \qquad (42)$$

sulla posizione delle cerniere è quello rappresentato in Figura 27 ed identificato dalle cerniere nelle posizioni:

$$\gamma_1 = \gamma_{r3} = -37.60^\circ \quad \gamma_2 = \gamma_{r1} = 15^\circ \quad \gamma_3 = 151.38^\circ \quad \gamma_4 = \pi - \gamma_{ini} \qquad (43)$$

Relativamente a quest'ultimo meccanismo di collasso si hanno le coordinate delle cerniere:

$$\begin{aligned} x_1 &= -4.22 \text{ m} & x_2 &= -4.42 \text{ m} & x_3 &= 3.70 \text{ m} & x_4 &= 6.02 \text{ m} \\ y_1 &= -3.25 \text{ m} & y_2 &= 1.19 \text{ m} & y_3 &= 2.02 \text{ m} & y_4 &= -6.50 \text{ m} \end{aligned} \qquad (44)$$

I pesi dei conci e le relative coordinate dei punti di applicazione:

$$P_1 = 84.76 \text{ kN/m} \qquad P_2 = 66.55 \text{ kN/m} \qquad P_3 = 186.07 \text{ kN/m} \qquad (45)$$

$$\begin{aligned} x_{g1} &= -4.85 \text{ m} & x_{g2} &= -0.41 \text{ m} & x_{g3} &= 4.92 \text{ m} \\ y_{g1} &= -1.49 \text{ m} & y_{g2} &= 3.41 \text{ m} & y_{g3} &= -3.13 \text{ m} \end{aligned} \quad (46)$$

I pesi del rinfiacco relativi ai tre conci e le relative coordinate dei punti di applicazione:

$$P_{rin1} = 6.65 \text{ kN/m} \quad P_{rin2} = 30.52 \text{ kN/m} \quad P_{rin3} = 17.80 \text{ kN/m} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} x_{rin1} &= -4.51 \text{ m} & x_{rin2} &= -1.55 \text{ m} & x_{rin3} &= 4.34 \text{ m} \\ y_{rin1} &= 2.14 \text{ m} & y_{rin2} &= 2.92 \text{ m} & y_{rin3} &= 2.43 \text{ m} \end{aligned} \quad (48)$$

Il centro di rotazione assoluta ha le seguenti coordinate (ottenute ancora con le (11) nelle quali sono state introdotte le coordinate delle cerniere (43)):

$$x_{2ass} = -6.126 \text{ m} \quad y_{2ass} = 38.196 \text{ m} \quad (49)$$

Con riferimento alla Figura 28, gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze sono (la dipendenza tra le rotazioni del secondo e terzo concio e la rotazione del primo concio è espressa ancora dalle (12) in cui le coordinate delle cerniere sono quelle del meccanismo di collasso della struttura rinforzata (43)):

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -0.63 \cdot \varphi_1 & \eta_2 &= -0.69 \cdot \varphi_1 & \eta_3 &= -0.56 \cdot \varphi_1 \\ \eta_{rin1} &= -0.29 \cdot \varphi_1 & \eta_{rin2} &= -0.55 \cdot \varphi_1 & \eta_{rin3} &= -0.86 \cdot \varphi_1 \\ \delta_1 &= 1.76 \cdot \varphi_1 & \delta_2 &= 4.17 \cdot \varphi_1 & \delta_3 &= 1.72 \cdot \varphi_1 \\ \delta_{rin1} &= 5.39 \cdot \varphi_1 & \delta_{rin2} &= 4.23 \cdot \varphi_1 & \delta_{rin3} &= 4.54 \cdot \varphi_1 \end{aligned} \quad (50)$$

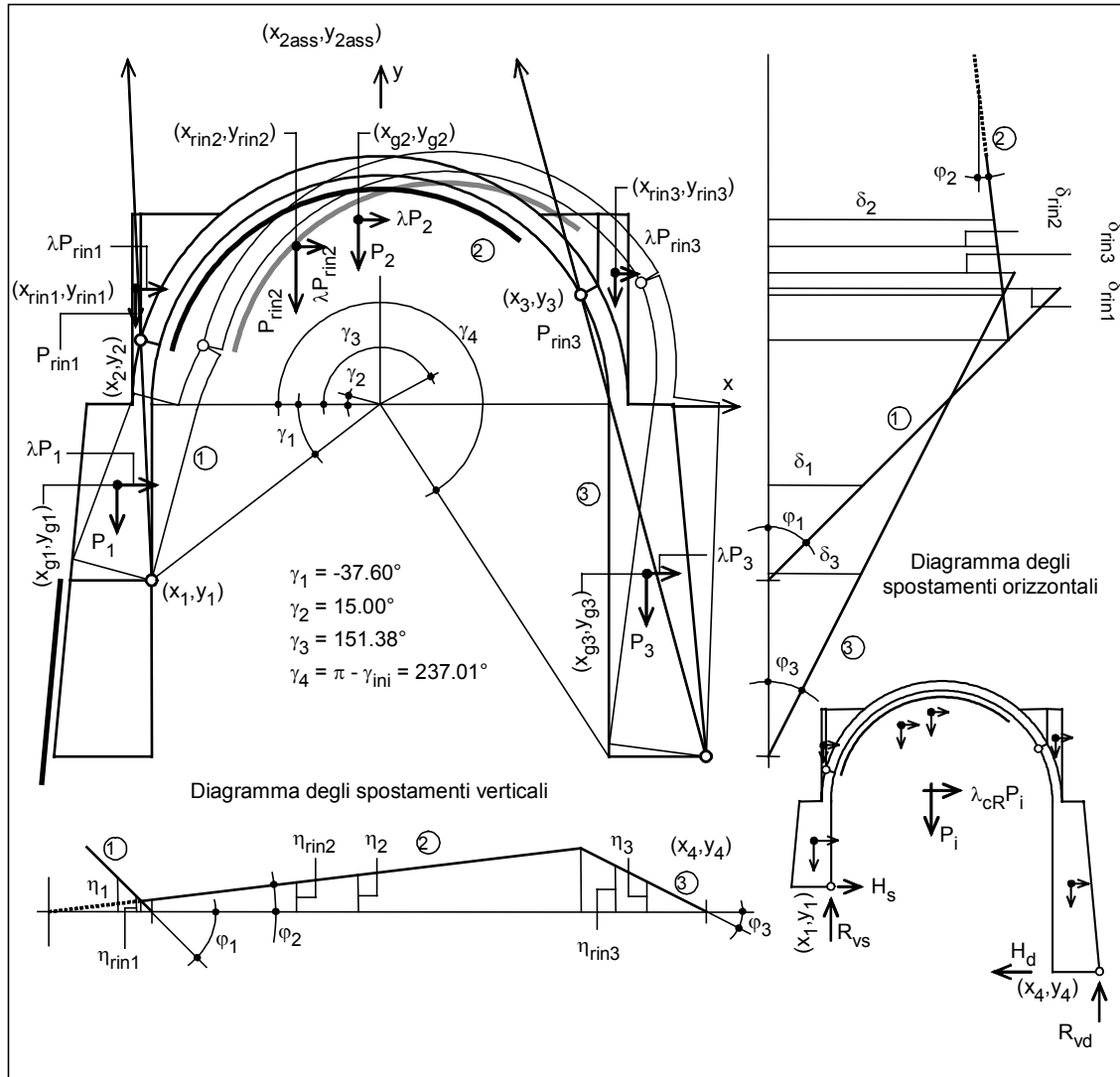


Figura 28: meccanismo di collasso della struttura rinforzata, diagrammi degli spostamenti e reazioni vincolari.

Infine, il moltiplicatore di collasso della struttura, con il rinforzo di Figura 27, è:

$$\lambda_{cR} = - \frac{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot \eta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \eta_{rini}}{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini}} = 0.2387 \quad (51)$$

Sempre con riferimento alla Figura 28, introducendo nel sistema (16) le quantità relative al meccanismo di collasso (43), si trovano le reazioni:

$$\begin{cases} R_{vs} = 140.79 \text{ kN/m} \\ R_{vd} = 251.57 \text{ kN/m} \end{cases} \quad \begin{cases} H_s = -26.62 \text{ kN/m} \\ H_d = 67.05 \text{ kN/m} \end{cases} \quad (52)$$

Gli andamenti del momento flettente (valutato rispetto alla linea di estradosso) e dello sforzo normale si ottengono ancora introducendo le reazioni (52) nelle (14) e (15); il corrispondente luogo dei centri di pressione, definito dalla (18) è tracciato in Figura 29 ed in Figura 30

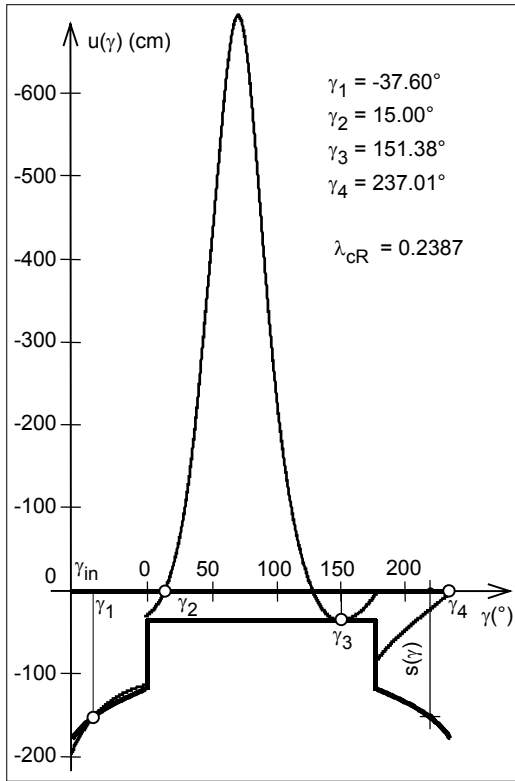


Figura 29: luogo dei centri di pressione.

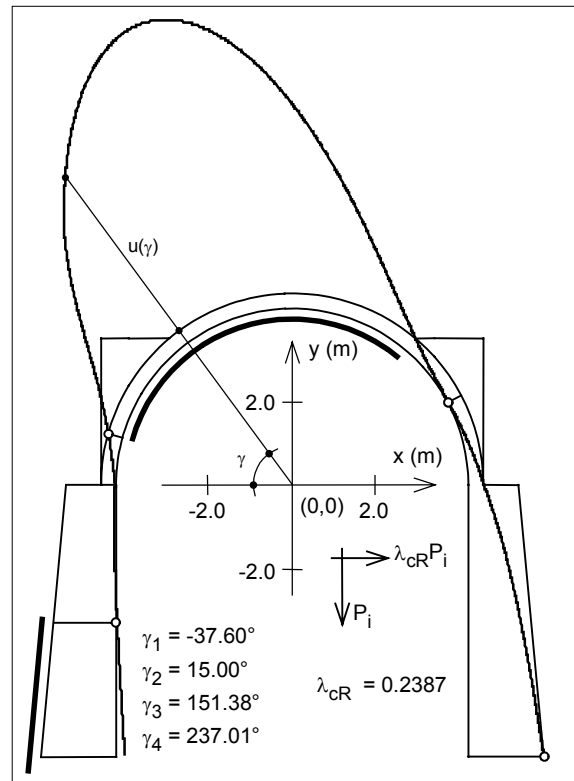


Figura 30: luogo dei centri di pressione.

Il peso totale delle masse in gioco e l'ordinata del baricentro di dette masse sono:

$$P_{tot} = P(\gamma_4) - P(\gamma_1) + P_{rin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_1) = 392.36 \text{ kN/m} \quad (53)$$

$$y_{tot} = \frac{P(\gamma_4) \cdot y_g(\gamma_4) - P(\gamma_1) \cdot y_g(\gamma_1)}{P_{tot}} + \frac{P_{rin}(\gamma_4) \cdot y_{grin}(\gamma_4) - P_{rin}(\gamma_1) \cdot y_{grin}(\gamma_1)}{P_{tot}} = -1.43 \text{ m} \quad (54)$$

La massa partecipante vale:

$$M^* = \frac{\left( \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini} \right)^2}{g \left( \sum_{i=1}^3 P_i \cdot \delta_i^2 + \sum_{i=1}^3 P_{rini} \cdot \delta_{rini}^2 \right)} = \frac{320.05 \text{ kN}}{g \quad m} \quad (55)$$

alla quale corrisponde la frazione di massa partecipante:

$$e^* = \frac{g \cdot M^*}{P_{tot}} = 0.816 \quad (56)$$

L'accelerazione spettrale di attivazione del meccanismo è quindi:

$$a_0^* = \frac{\lambda_c g}{e^*} = 0.293 \text{ g} \quad (57)$$

valore leggermente superiore a quello relativo alla configurazione di rinforzo precedentemente considerata, coinvolgente solo l'intradosso della volta.

L'effettiva disposizione del rinforzo dovrà infine tenere conto del carattere oscillatorio dell'azione sismica, (e quindi essere simmetrica) e prevedere una certa lunghezza di ancoraggio del rinforzo stesso (Figura 31).

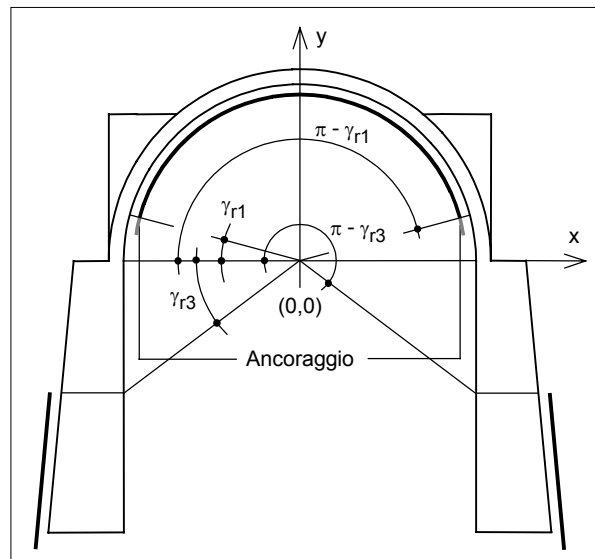


Figura 31: Configurazione di rinforzo coinvolgente i piedritti.

## 6 CONCLUSIONI

L'approccio delineato mediante la scomposizione della costruzione complessa in Macro-elementi strutturali e la ricerca dei meccanismi di collasso più probabili mediante analisi storiche, modellazioni analitiche e numeriche si presenta alquanto agevole se riferita al singolo macroelemento, nelle usuali ipotesi semplificative del comportamento strutturale del solido murario. Certamente per le applicazioni bisogna

tener conto della compresenza di vari Macro-elementi contigui, fatto che complica le analisi ma non muta concettualmente la metodologia di approccio delineata. Una generalizzazione della procedura per strutture complesse non è formalizzabile poiché può solo calarsi nel caso specifico. Il concetto dell'analisi limite conduce a considerare la efficacia del rinforzo in quanto esso inibisce i meccanismi corrispondenti ai valori più bassi del moltiplicatore di collasso per carichi orizzontali.

## 7 RICONOSCIMENTI

*La presente Ricerca si è giovata del finanziamento del CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche - Italia) e del MIUR (Ministero della Università e della Ricerca Scientifica - Italia).*

## 8 BIBLIOGRAFIA

- [1] F. Doglioni, A. Moretti, V. Petrini (Eds.), *Le chiese e il terremoto. Dalla vulnerabilità constatata nel terremoto del Friuli al miglioramento antisismico nel restauro*, Edizioni LINT, Trieste, 1994.
- [2] Ordinanza PCM 3431 "Ulteriori modifiche ed integrazioni all'ordinanza del PCM n. 3274 del 20 marzo 2003", 3 Maggio 2005.
- [3] G. Creazza, R. Matteazzi, A. Sietta, R. Vitaliani, "*Analysis of masonry structures reinforced by FRP*", Third International Seminar Structural Analysis of Historical Constructions, Guimaraes, Portugal, 7-9 November 2001.
- [4] A. Di Tommaso, F. Focacci, *Strengthening Historical Monuments with FRP: a Design Criteria Review*, in *Composites in Construction: a Reality*, Proc. of Int Workshop, Eds. E. Cosenza, G. Manfredi, A. Nanni, Capri, Italy 2001. (ASCE- CI, 2002).
- [5] "*Charter of Krakow*" *Principles for the conservation and restoration of the built heritage*, Krakow, 2000.
- [6] "*Linee guida per l'applicazione al patrimonio culturale della normativa tecnica di cui all'Ordinanza P.C.M. 3274/2003*" Eds. R. Cecchi and M. Calvi, Ministero per i Beni e le Attività Culturali, Roma, luglio 2006.
- [7] A. Di Tommaso, *Consolidamento contemporaneo. Edilizia Storica*, in *Trattato sul Consolidamento*, Ed. P. Rocchi, sez. C.1.3, Mancosu Editore, Roma, 2003.
- [8] D. Bufo, "*Sperimentazioni e modellazioni dello stato limite di collasso sismico di macroelementi murari rinforzati con compositi (FRC, FRCM)*", PhD Thesis, Università di Trento (Italia), febr. 2006.
- [9] F. Focacci, "*Rinforzo di strutture di muratura con materiali compositi FRP*", ed Flaccovio, Palermo, 2007 (di prossima pubblicazione).
- [10] D. Tinazzi, M. Arduini, C. Modena, A. Nanni "*FRP-structural repointing of Masonry assemblages*", *Advanced composite materials in bridge and structures*, 3° Int. Conf, Ottawa, Canada, agosto 2000
- [11] A. Di Tommaso, O. Manfroni "*Composite retrofitting of a Restored historical Roman Arch*" Proc. Int. Conf. Structural Composite for Infrastructure Application, MESC-4, Alexandria, Egypt, 2005.

## APPENDICE

Per il caso di studio relativo alla volta circolare con piedritti (Figura 8), si fa riferimento alle seguenti funzioni che associano all'anomalia  $\gamma$  alcune grandezze geometriche, forze e punti di applicazione.

Le coordinate cartesiane rettangolari dei punti di estradosso e di intradosso della sezione identificata da  $\gamma$  sono:

$$\begin{aligned}
 x_e(\gamma) &= \begin{cases} -\left(R_i + s_{pb}\right) - \frac{s_{ps} - s_{pb}}{H_i} (H_i + R_i \cdot \tan \gamma) & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma \leq 0 \\ -R_e \cdot \cos \gamma & \text{se } 0 < \gamma < \pi \\ \left(R_i + s_{pb}\right) + \frac{s_{ps} - s_{pb}}{H_i} (H_i - R_i \cdot \tan \gamma) & \text{se } \pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \end{cases} \\
 y_e(\gamma) &= \begin{cases} R_i \cdot \tan \gamma & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma \leq 0 \\ R_e \cdot \sin \gamma & \text{se } 0 < \gamma < \pi \\ -R_i \cdot \tan \gamma & \text{se } \pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \end{cases} \\
 x_i(\gamma) &= \begin{cases} -R_i & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma \leq 0 \\ -R_e \cdot \cos \gamma & \text{se } 0 < \gamma < \pi \\ R_i & \text{se } \pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \end{cases} \\
 y_i(\gamma) &= \begin{cases} R_i \cdot \tan \gamma & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma \leq 0 \\ R_i \cdot \sin \gamma & \text{se } 0 < \gamma < \pi \\ -R_i \cdot \tan \gamma & \text{se } \pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{a1}$$

L'altezza della sezione identificata da  $\gamma$  è:

$$s(\gamma) = \sqrt{(x_e(\gamma) - x_i(\gamma))^2 + (y_e(\gamma) - y_i(\gamma))^2} \tag{a2}$$

Il peso del sistema compreso tra la sezione di base del piedritto di sinistra e la sezione identificata da  $\gamma$  è:

$$P(\gamma) = \begin{cases} \gamma_m \cdot \frac{(y_e(\gamma) + H_i) \cdot (s_{pb} + s(\gamma))}{2} & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma \leq 0 \\ P_p + \gamma_m \cdot \frac{\gamma}{2} \cdot (R_e^2 - R_i^2) & \text{se } 0 < \gamma < \pi \\ P_p + P_v - \gamma_m \cdot y_e(\gamma) \cdot \frac{s_{ps} + s(\gamma)}{2} & \text{se } \pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \end{cases} \tag{a3}$$

Le coordinate del baricentro del volume del sistema tra la sezione di base del piedritto di sinistra e la sezione identificata da  $\gamma$  sono:

$$x_g(\gamma) = \begin{cases} - \left[ \begin{array}{l} R_i + \frac{\gamma_m}{P(\gamma)} \cdot (y_e(\gamma) + H_i) \cdot \\ \left( \frac{s(\gamma)^2}{2} + \frac{s_{pb} - s(\gamma)}{2} \cdot \frac{s_{pb} + 2s(\gamma)}{3} \right) \end{array} \right] & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma \leq 0 \\ \frac{I}{P(\gamma)} \cdot \left( P_p \cdot x_{gp} - \frac{4}{3\gamma} (P(\gamma) - P(0)) \cdot \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \right) & \text{se } 0 < \gamma < \pi \\ \frac{I}{P(\gamma)} \cdot \left[ \begin{array}{l} P_p \cdot x_{gp} + R_i \cdot (P(\gamma) - P(0)) + \\ -\gamma_m \cdot y_i(\gamma) \cdot \left( \frac{s_{ps}^2}{2} + \frac{s(\gamma) - s_{ps}}{2} \cdot \frac{s(\gamma) + 2s_{ps}}{3} \right) \end{array} \right] & \text{se } \pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \quad (\text{a4}) \end{cases}$$

$$y_g(\gamma) = \begin{cases} -H_i + \frac{\gamma_m}{P(\gamma)} \cdot (y_e(\gamma) + H_i)^2 \cdot \frac{s_{pb} + 2s(\gamma)}{6} & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma \leq 0 \\ \frac{I}{P(\gamma)} \cdot \left( P_p \cdot y_{gp} + \frac{4}{3\gamma} (P(\gamma) - P(0)) \cdot \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) & \text{se } 0 < \gamma < \pi \\ \frac{I}{P(\gamma)} \cdot \left[ P_p \cdot y_{gp} + P_v \cdot y_{gv} - \gamma_m \cdot y_i(\gamma)^2 \cdot \frac{2s(\gamma) + s_{ps}}{6} \right] & \text{se } \pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \end{cases}$$

L'altezza del rinfiaco agente sulla sezione identificata da  $\gamma$  è:

$$h_{rin}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma < 0 \\ y_e(\gamma_r) - y_e(\gamma_r) & \text{se } 0 \leq \gamma \leq \gamma_r \\ 0 & \text{se } \gamma_r < \gamma < \pi - \gamma_r \\ y_e(\gamma_r) - y_e(\gamma_r) & \text{se } \pi - \gamma_r \leq \gamma \leq \pi \\ 0 & \text{se } \pi < \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \end{cases} \quad (\text{a5})$$

Il peso del rinfiaco tra la sezione di base del piedritto di sinistra e la sezione identificata da  $\gamma$  è:

$$P_{rin}(\gamma) = \gamma_{rin} \cdot \int_{\gamma_{in}}^{\gamma} h_{rin}(\xi) \cdot R_e \sin \xi d\xi \quad (\text{a6})$$

Le coordinate del baricentro del volume di rinfiaco tra la sezione di base del piedritto di sinistra e la sezione identificata da  $\gamma$  è:

$$x_{grin}(\gamma) = \frac{\gamma_{rin}}{P_{rin}(\gamma)} \cdot \int_{\gamma_{in}}^{\gamma} -R_e^2 \cdot h_{rin}(\xi) \cdot \cos \xi \cdot \sin \xi d\xi \quad (\text{a7})$$



$$y_{grin}(\gamma) = \frac{\gamma_{rin}}{P_{rin}(\gamma)} \cdot \int_{\gamma_{in}}^{\gamma} R_e \cdot h_{rin}(\zeta) \cdot \left( R_e \sin \zeta + \frac{h_{rin}(\zeta)}{2} \right) \cdot \sin \zeta d\zeta$$

L'inclinazione sull'orizzontale della sezione identificata da  $\gamma$  è:

$$\psi(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma_{in} \leq \gamma \leq 0 \\ \gamma & \text{se } 0 < \gamma < \pi \\ \pi & \text{se } \pi \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{in} \end{cases} \quad (\text{a8})$$

