

# MODELLAZIONE DI VOLTE E ARCHI IN MURATURA

**Barbara De Nicolo  
Daniel Meloni  
Dipartimento di Ingegneria strutturale  
Università di Cagliari**

## **Premessa**

Nell'approccio al recupero statico del patrimonio storico artistico oggi esistente è, a nostro parere, essenziale non dimenticare mai che esso è frutto di intuizioni statiche acquisite con metodi semplici e pratici, basate su esperienze dirette affrontate con sensibilità, umiltà e pazienza mediante tentativi non sempre coronati da successo.

Solo nel XVIII secolo è sopraggiunta la razionale presa di coscienza del corrispondente regime statico. La stessa umiltà e sensibilità e razionalità dovrebbe accompagnare il tecnico moderno che si appresta al difficile compito di verificare l'idoneità statica, ed eventualmente consolidare, le costruzioni storiche.

D'altro canto, tecniche di calcolo sempre più sofisticate portano oggi alla verifica di queste strutture mediante complicati algoritmi o programmi di calcolo complessi che molto spesso, con l'infinità di informazioni che offrono, snaturano o offuscano il significato fisico del problema in esame.

Da tutto ciò scaturisce che al giorno d'oggi per un progettista, che si trova nella necessità di consolidare una struttura ad arco o a cupola e che deve risolvere il problema in un tempo compatibile con la redditività del lavoro affidatogli, è assai arduo districarsi tra le infinite offerte del mercato su software e semplici considerazioni di statica.

In questa nota, con uno sguardo al passato ed in modo non certo esaustivo, si vogliono dare delle indicazioni sui risultati offerti sull'argomento, in questo terzo millennio, dalla scienza e dalle tecniche di calcolo.

## **1. Concetti guida fondamentali - archi-volte-funi**

### **1.1 Rapporto forma-struttura e ricerca delle vie statiche ottimali assolute**

Si definisce "via statica assoluta" la soluzione indipendente da qualsiasi altra considerazione che non sia propriamente statica; essa consiste nel riportare a terra un assegnato sistema di forze (o sollecitazioni) esterne attraverso la forma ottimale. Ossia, se vogliamo convogliare determinate forze a terra, attraverso composizioni o decomposizioni delle successive risultanti, dobbiamo individuare il percorso ideale che ci assicuri la sollecitazione del materiale solo ad azione normale, che è la più facilmente intuibile e sostenibile dalle tecnologie a disposizione (soprattutto nelle costruzioni storiche).

Per esemplificare il comportamento per curvatura è sufficiente soffermarci sul poligono funicolare dei carichi inteso come il percorso ideale delle forze in puro sforzo normale.

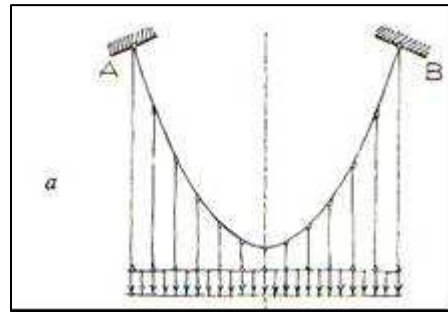


Fig. 1 Configurazione di equilibrio ad andamento parabolico di una fune priva di peso proprio sollecitata da carico uniformemente distribuito

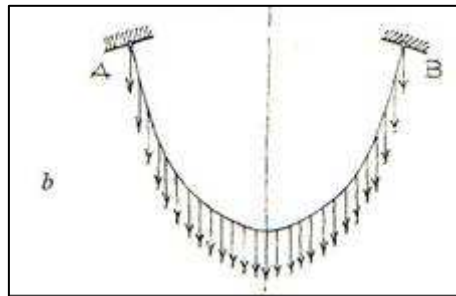


Fig. 2 Configurazione di equilibrio “catenaria” di una fune soggetta al solo peso proprio o carico uniformemente distribuito lungo il suo sviluppo

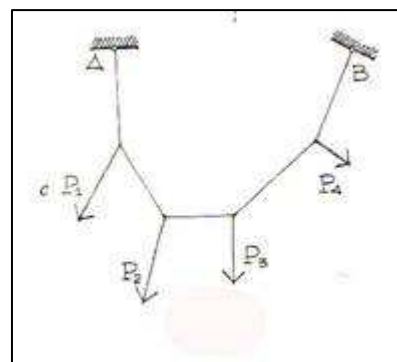


Fig. 3 Configurazione di equilibrio “poligono funicolare” di una fune di peso proprio trascurabile sollecitata da carichi concentrati

In funzione della lunghezza della fune, del dislivello dei vincoli e della posizione del primo lato del poligono funicolare abbiamo infinite configurazioni di equilibrio, tutte “ottimali”. Come tradurre queste infinite configurazioni astratte in un caso reale e concreto? I parametri assegnati sono: sistema di forze esterne, asse geometrico, o direttrice, di una struttura ad arco. La soluzione del problema consiste nella sovrapposizione dell’asse geometrico, o direttrice, con il “poligono funicolare”.

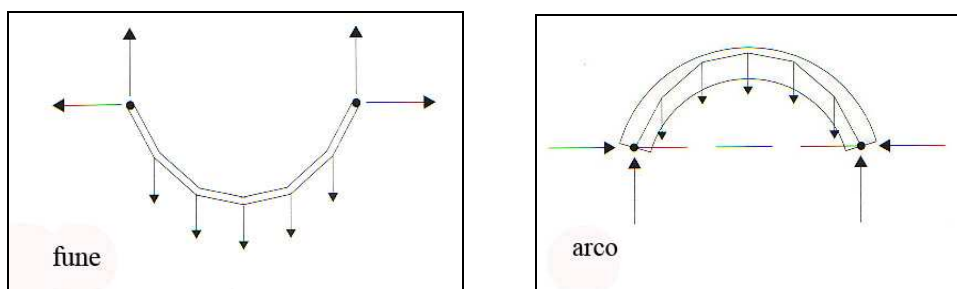


Fig. 4 Dalla fune all’arco

Nelle funi l'elemento strutturale è soggetto a sola trazione e per mancanza di rigidità flessionale asse geometrico e curva delle pressioni coincidono, negli archi e volte l'elemento strutturale è soggetto a sola compressione e se la curva delle pressioni è eccentrica rispetto all'asse geometrico, la sezione può essere ancora tutta compressa (Fig. 5 a) se  $e = s/6$  o parzializzata (Fig. 5 b) se  $e > s/6$ .

Lo sforzo dell'uomo nell'evo antico e medio si è identificato per millenni nella ricerca della direttrice curva (arco, volta o cupola) più idonea a convogliare le forze in modo da ottenere solo compressione.

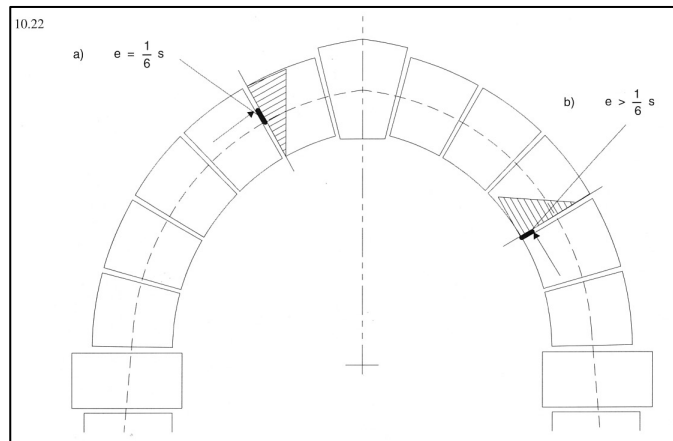


Fig. 5 Compressione eccentrica

## 1.2 La linea curva come espressione resistente

La forma arcuata è derivata dalla costruzione per impilamento in verticale. Nel trasmettere i carichi dall'alto verso il basso si cerca un unico canale statico verticale nel quale i conci sono soggetti a sola compressione e le distribuzioni delle tensioni sono uniformi. Si forza il principio costruttivo disponendo i conci in leggero aggetto l'uno rispetto all'altro, secondo un canale statico deviato rispetto alla verticale e si ottengono conci soggetti a sola compressione ma anche distribuzioni non uniformi delle tensioni.

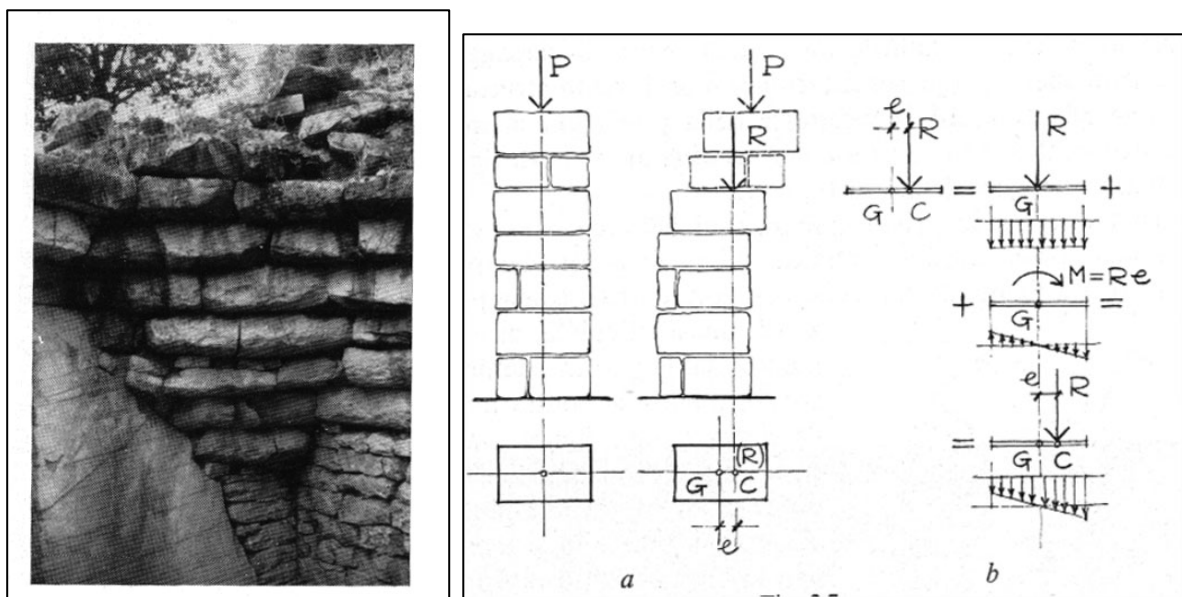


Fig. 6 Costruzione con conci in aggetto rispetto alla verticale

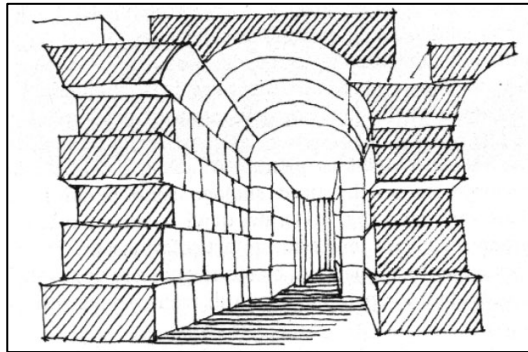


Fig. 7 Egitto VI dinastia cappella di Abido. Tentativo di mantenere lo sforzo di compressione il più uniforme possibile

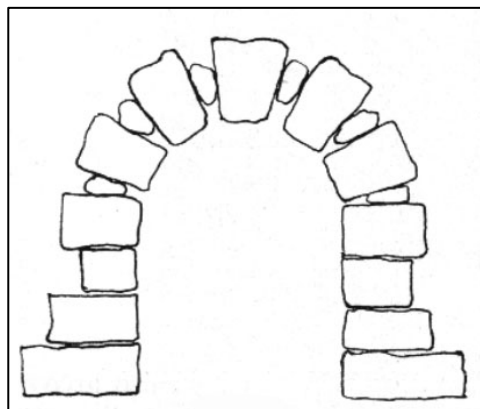


Fig. 8 Arco egizio “figura statica che non dorme mai”. Assestamenti dell’arco tesi ad accostare l’asse geometrico al percorso dei carichi

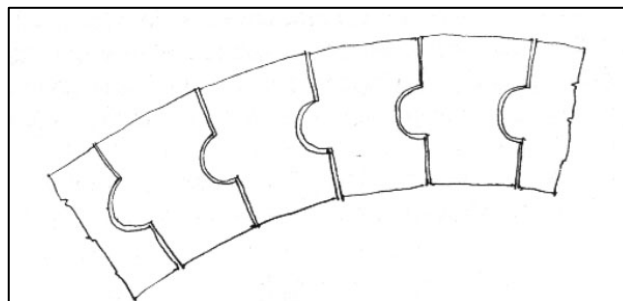


Fig. 9 Arco arabo – tentativo di cerniera

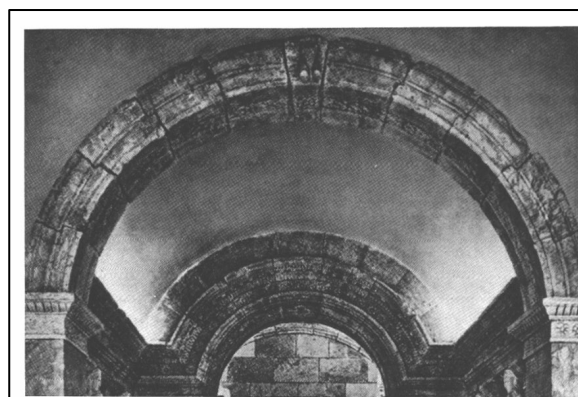


Fig. 10 Arco persiano

## 2. Studi sul regime statico di archi e volte

Vitruvio (I sec. A.C.) nel 6° libro della sua opera, *I Dieci libri sull'architettura*, mostrò di aver intuito il carattere spingente di tali costruzioni sui muri di imposta; sino a tutto il Medioevo l'unica indicazione pervenutaci è relativa al dimensionamento dei piedritti per contenere la spinta.

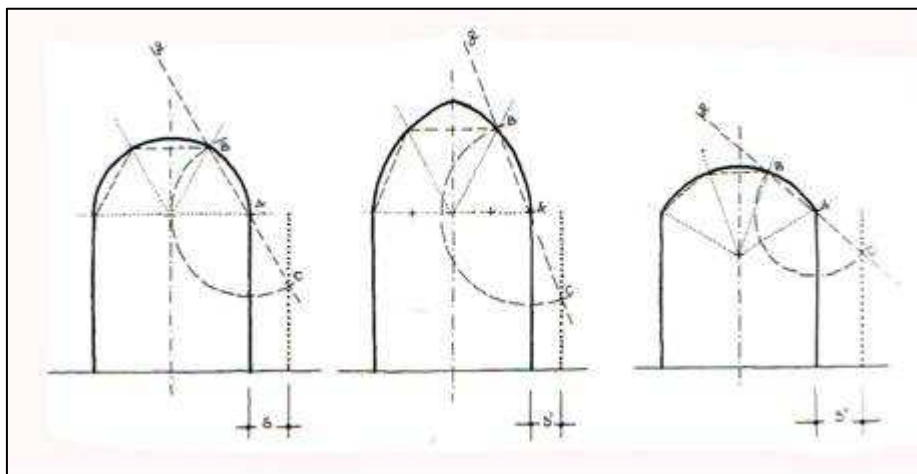


Fig. 11 Dimensionamento grafico dei piedritti

Leon Battista Alberti (*De Re Aedificatoria*; 1452) dettò i principi estetici e simbolici e le proporzioni alla base del dimensionamento delle strutture, Leonardo da Vinci (Codici di Madrid, Codice Forster II, 1490-1505) definì l'arco come "Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze" ed un disegno (Fig. 12).

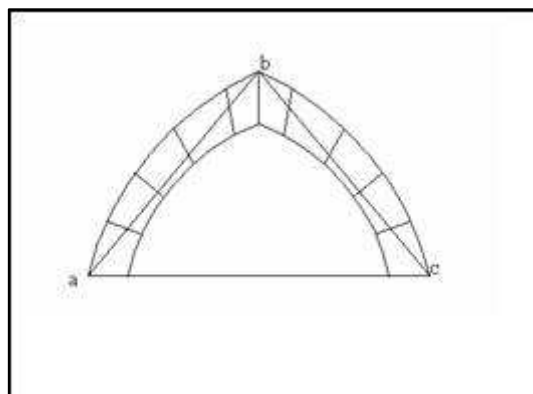


Fig. 12 Leonardo, interpretazione dell'arco

Le correnti di pensiero teorico-pratiche tra il seicento ed il settecento furono in accordo sulla necessità di centrare lo sforzo normale in corrispondenza delle facce dei conci a contatto. Ma da un lato si era favorevoli ai conci con facce scabrose, che avrebbero assicurato la stabilità per mezzo dell'attrito, dall'altro si asseriva l'assoluta necessità di superfici di contatto lisce per permettere appunto la perfetta centratura dell'azione normale sulla faccia. A favore di questa linea si inserisce de La Hire (*Traité de Mécanique*, 1712) che ipotizza che l'arco sia costituito da elementi solidi, cunei, pesanti ma rigidi, privi di attrito sulle facce, apre il dibattito sulla forma efficace delle volte, analizza il problema dell'equilibrio prescindendo dai piedritti, affronta il problema del dimensionamento dei piedritti e suppone dei **giunti di rottura** posti a  $45^\circ$  dall'imposta. Non essendo ancora noto il concetto di deformazione infinitesima

della Teoria dell'elasticità i ragionamenti erano incentrati sulle grandi deformazioni. La maggiore preoccupazione degli studiosi era rivolta ad evitare la crisi dell'arco per cui non si poneva ancora il problema della sua forma ottimale.

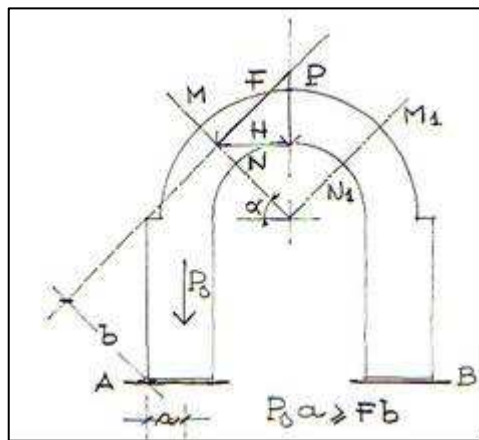


Fig. 13 Modello di de La Hire per la determinazione della dimensione dei piedritti

Il de La Hire utilizza il concetto di giunto di rottura per la soluzione di un problema di equilibrio rigido: la determinazione della dimensione necessaria alle spalle di un arco a tutto sesto per contrastare la spinta.

Sulla trattazione del De La Hire intervengono Belidor (1693-1761) con piccole varianti, Couplet (1642-1722) che sul calcolo delle centine osserva che la zona di arco che grava su di esse è quella centrale oltre l'angolo di  $30^\circ$  sull'orizzontale ed introduce anche dei conci con attrito individuando la formazione di giunti di rottura, come cerniere.

Nel campo della elasticità, Hook (1635-1703) mette a punto la legge sulla elasticità: "ut tensio sic vis".

Nel filone degli studi di statica fondati su principi di analisi geometrica teorica ma anche su prove sperimentali, eseguite con sferette di ferro, i fratelli Bernoulli (fine del seicento), individuano in termini analitici la curva catenaria come l'unica configurazione deformata, tra le infinite che potrebbero scegliersi, nella quale il baricentro si colloca nella posizione più bassa possibile.

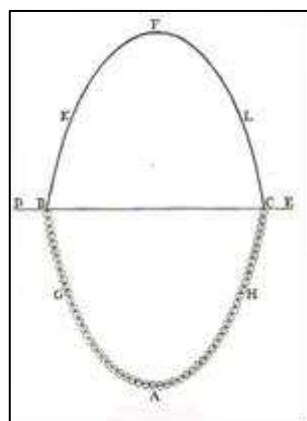


Fig. 14 Curva catenaria dei fratelli Bernoulli

Su questa base l'inglese Sterling nell'opera "Lineae tertii ordinis Newtonianae", (1717) risolve il problema della forma della curva che garantisce lo stato di equilibrio

di sfere di egual peso e che coincide con la catenaria ribaltata verso l'orizzonte della collana di tali sfere.

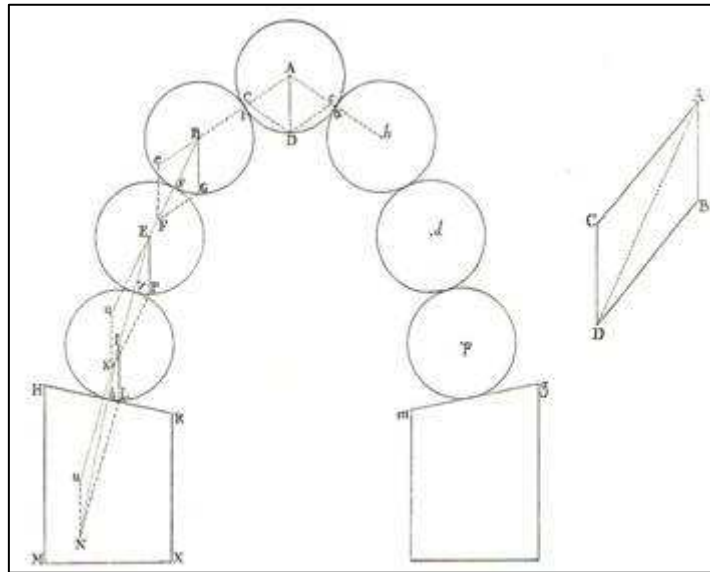


Fig. 15 Stato di equilibrio di sfere di egual peso di Sterling

Bouguer nel 1734 estende il concetto della catenaria al tridimensionale per la determinazione della forma ottimale delle cupole, prescindendo dall'attrito. In pieno Illuminismo (fine del XVIII secolo) lo studio delle volte e degli archi registra uno slancio notevole per effetto della diffusione del calcolo matematico differenziale. Queste diverse metodologie di approccio geometrico sperimentale e matematico portano al primo grande scontro tra i sostenitori dell'una e l'altra scuola di pensiero. Nel 1743 papa Benedetto XIV preoccupato delle lesioni nella Cupola di San Pietro affida a Giovanni Poleni, prof. di Fisica a Padova, un programma di ricerca per indicare le cause delle lesioni e i rimedi da adottare. In questa occasione si avviò lo studio sistematico e scientifico sulle costruzioni e si introdusse come metodo di lavoro la razionalità scientifica.



Fig. 16 Giovanni Poleni

Il Poleni esclude un pericolo immediato e dallo studio emerse che le lesioni lungo i meridiani coinvolgevano le nervature sino al tamburo, che il tamburo era indebolito da scala a chiocciola nello spessore, che le catene dei quattro archi che sostenevano il tamburo erano deformate. Secondo i suoi studi risultò che le cause delle lesioni erano da attribuirsi alla rapidità con cui la cupola era stata costruita, alla scarsa qualità dei mattoni e malta, al differente comportamento mattoni e travertino, alle forti piogge durante la costruzione, alle vibrazioni, spari d'artiglieria, fulmini, terremoti,

intercorsi dalla costruzione. I rimedi proposti consistevano nella ricucitura di tutte le lesioni con malta e nella cerchiatura della cupola con forti catene di acciaio.

Tre studiosi noti come i “tre matematici” mossero aspre critiche al Poleni asserendo che “occorre sempre ricorrere alla teoria e alle riflessioni matematiche” ed applicarono un rudimentale Principio dei Lavori virtuali riferito ad un meccanismo corrispondente a movimenti rigidi di porzioni della cupola intorno a cerniere rappresentate dalle lesioni: Stabilirono che l’allungamento dovuto al caldo e al sole *lo deve aver qui prodotto, in più di un secolo e mezzo, l’azione continua di una spinta così gagliarda*, per cui le catene proposte dal Poleni “non sono sufficienti”. Il Poleni obiettò “*ma Dio guardi che la bisogna non sia andata come i calcoli dimostrano, che non ci voleva neppure un minuto per far andare la Mole per terra*”. Buonarroti non sapeva di matematica eppure seppe progettare la Cupola!

Vanvitelli nel 1743 si appresta a dirigere i lavori su indicazioni del Poleni.

Ma l’aspetto più significativo di questo episodio è che il Poleni trovò il concetto di **forma resistente**.

Applicò gli studi di Sterling sulla catenaria, prese in esame uno dei costoloni, lo divise in conci e, utilizzando un modellino sperimentale, trovò la curva di equilibrio secondo la quale si dispone la collana di sfere di peso proporzionale ad ogni concio, disposte secondo una scala geometrica rispetto al vero.

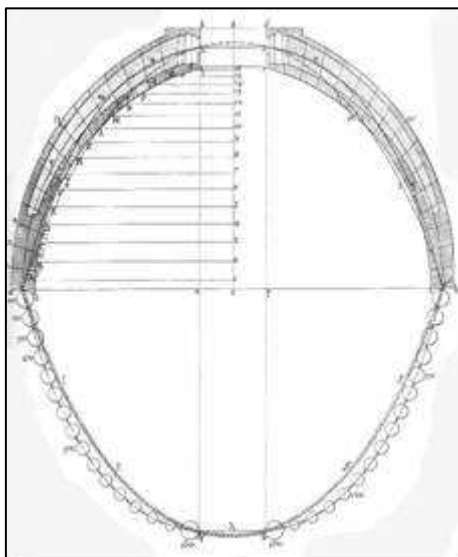


Fig. 17 Schema della Cupola di San Pietro del Poleni

Il Poleni concluse che “il profilo più conveniente da attribuire all’arco è quello per cui la fibra baricentrica risulti funicolare dei carichi su di esso agenti”.

All’epoca di Coulomb, a seguito degli studi sperimentali di Boistard su ben 22 modelli in scala quasi reale (1795-96), di Gauthey e di Rondelet, era consolidata l’opinione che il meccanismo di rottura dell’arco coincidesse con il seguente modello (Fig. 18).

In questo modello non è considerata ancora l’importanza della “forma” ma è chiaramente sottolineato che il pericolo di collasso dell’arco non discendeva solo dall’attrito tra i giunti, ma anche dalla possibilità di rotazione relativa dei conci tra loro. Coulomb prese in esame queste osservazioni e sulla base della resistenza ad attrito del materiale stabili, in via teorica, i valori limite entro i quali deve essere contenuta la spinta orizzontale.

Il limite inferiore della spinta orizzontale è quello per cui sono impediti lo scorrimento e la rotazione verso il basso di un giunto.



Il limite superiore della spinta orizzontale è quello per cui sono impediti lo scorrimento e la rotazione verso l'alto di un giunto. Maggiore è la differenza tra questi due valori, maggiore è la possibilità che l'arco sia stabile. Rimaneva ancora dubbia la posizione dei giunti di rottura, che venivano calcolati con un metodo grafico - analitico per tentativi.

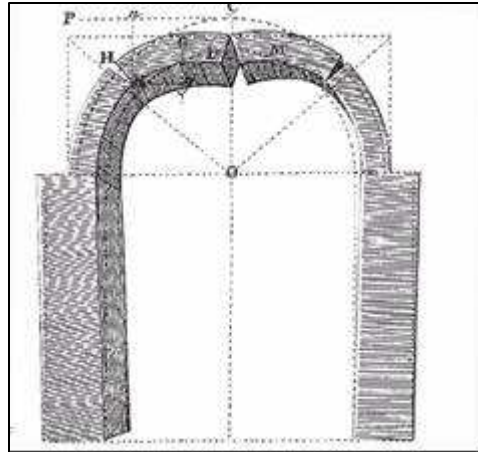


Fig. 18 Modello di meccanismo di rottura dell'arco, consolidato sino alla fine del 1700

Navier (1785-1836) ipotizza che la linea delle pressioni, in corrispondenza dei giunti di rottura, debba passare per un punto tale da garantire sempre tensioni dello stesso segno (anche se non uniforme). Si poteva dunque calcolare il valore della spinta, la curva delle pressioni e lo stato tensionale tra concio e concio. Anche Young (Natural Philosophy, 1807) giunse alle stesse considerazioni.

L'applicazione pratica delle ipotesi di Navier fu messa appunto dal Mery in un articolo (Annales des Pons et Chaussées, 1840) con il procedimento, tuttora utilizzato, del Navier-Mery.

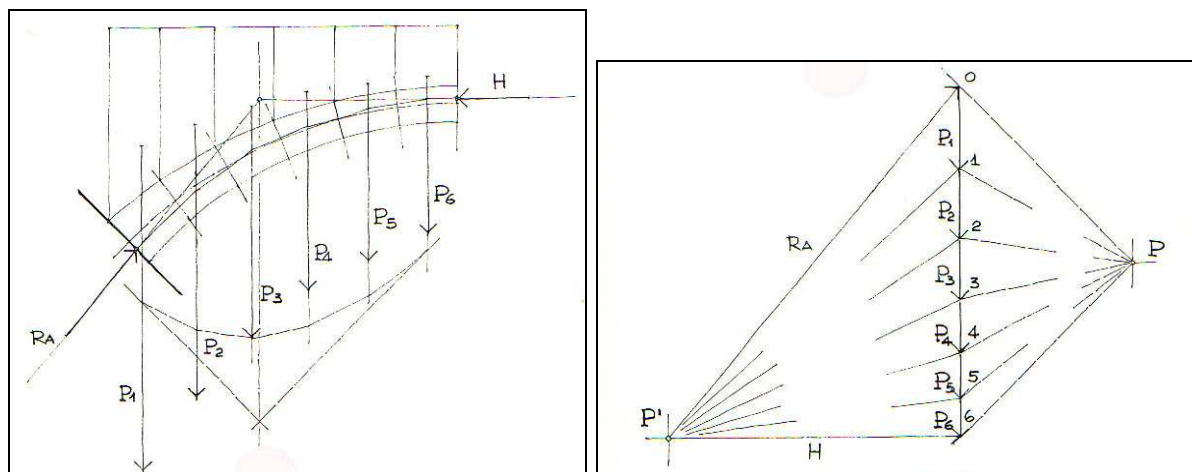


Fig. 19 Metodo di Navier-Mery

La semplice costruzione geometrica del passaggio obbligato del poligono funicolare nel terzo medio inferiore alle reni dell'arco e nel terzo medio superiore in chiave, rende possibile la determinazione del regime statico dell'arco. Gli infiniti al cubo poligoni funicolari sono ridotti per l'equilibrio all'unico poligono nel quale la retta d'azione dei carichi, l'azione  $H$  in chiave e la  $R_A$  alle reni passano per un unico punto.

In questa soluzione è evidente la necessità di dover fare affidamento su fenomeni di adattamento elasto-plastico per guidare il regime statico verso condizioni tensionali meno gravose. I limiti di questa trattazione a vantaggio della sicurezza, accettabile e utilizzata tutt'ora, consistono nel fatto che non si conosce con sicurezza lo stato di sollecitazione interna dell'arco e di conseguenza non si possono eseguire verifiche "certe" di dimensioni e di materiale, inoltre si impone che la curva delle pressioni passi per due punti definiti.

L'ottocento fu caratterizzato dai sostenitori dell'analisi elastica, che intendevano estendere la teoria dell'elasticità allo studio delle volte murarie. Perrodil (1872), Crotti (1875), Castigliano (1876) e tanti altri applicarono l'analisi elastica. Per avvalorare l'impostazione elastica, il problema divenne quello di garantire il rispetto delle condizioni teoriche in modo che lo schema dell'arco incastrato trovasse corrispondenza nella costruzione reale. Tali condizioni essenzialmente possono essere riassunte nell'assicurare l'immobilità degli appoggi, murare centine indeformabili, scegliere attentamente i materiali, eseguire lentamente il disarmo.

Nei primi anni trenta del XX secolo si apre il campo di ricerca basata sulla meccanica dei solidi e delle strutture ed all'inizio degli anni 50, analisi elastica e plastica diventano metodologie parallele.

L'analisi elastica fissa le azioni esterne e cerca stati di tensione, deformazione e spostamento attraverso equazioni di equilibrio, congruenza e legame costitutivo per verificare se quegli stati effettivi di tensione sono localmente contenuti entro limiti ammissibili di esercizio.

L'analisi plastica fissa le massime prestazioni di resistenza offerte da una sezione e stabilisce le azioni esterne per le quali la struttura non ha più risorse in grado di garantire l'equilibrio globale ed è quindi destinata a collassare per l'instaurarsi di un meccanismo.

La svolta avviene nei primi anni sessanta con Heyman, che applicando l'analisi limite allo Skeleton stone, ha permesso, alla luce dei due teoremi della plasticità e su coerenti ipotesi del materiale muratura, lo studio delle murature in modo semplice e coerente.

Il concetto di analisi a collasso e dello *spessore ideale degli archi e delle volte* si riallaccia al breve excursus storico. Il trascurare il collasso per eccesso di stress nel materiale riporta in auge l'idea di un'architettura pre-galileiana basata sulla geometria e la proporzione ed esalta l'operato dei maestri medievali e rinascimentali che con la loro *arte del costruire* seppero dar vita, in opere tuttora stabili, alla massima espressione della tipologia costruttiva della volta e dell'arco.

### **3. Calcolo a rottura delle strutture voltate**

#### **3.1. Principi informativi sulla teoria di Heyman**

Heyman fonda la sua teoria sulla validità di tre ipotesi:

1. resistenza a trazione nulla,
2. resistenza a compressione della muratura virtualmente infinita,
3. non si verifica lo scorrimento dei giunti dell'arco l'uno rispetto all'altro.

La prima ipotesi è a favore della sicurezza, la seconda ipotesi si basa sulla constatazione che il collasso di una struttura in muratura, a causa del basso livello degli sforzi presenti, non è dovuto allo schiacciamento di alcuni elementi, ma all'apertura di fessure e alla formazione di un meccanismo. In ogni caso per

contenere il livello di compressione si può ridurre eventualmente il valore del coefficiente di sicurezza, imponendo l'ulteriore condizione di una distanza minima della curva delle pressioni dai bordi della sezione, o effettuare un controllo sul valore medio delle tensioni nelle sezioni. Una certa cautela è consigliata comunque nel caso di archi ribassati o di grandi luci come nei ponti, in cui il valore della spinta può essere particolarmente elevato. Con la terza ipotesi si suppone che il coefficiente di attrito tra i conci sia sufficientemente elevato o che le pietre siano ben interconnesse tra loro; in ogni caso si può sempre effettuare una verifica a scorrimento, anche solo per controllare che la linea delle pressioni incida sui giunti con un'inclinazione inferiore all'angolo di attrito dei materiali utilizzati.

I meccanismi di collasso per le geometrie più usuali e per le condizioni di carico più tipiche sono sostanzialmente noti e pertanto lo sono le posizioni delle cerniere plastiche che consentono di rendere determinato il problema; sicché nelle condizioni limite non vi è difficoltà a determinare le reazioni e a tracciare il poligono delle forze e quindi la curva delle pressioni. Si può quindi enunciare il "Teorema di sicurezza": *se per l'intero arco viene trovata la linea di spinta, che è in equilibrio con i carichi esterni (incluso il peso proprio) e che giace all'interno della muratura, allora l'arco è da ritenersi sicuro*. Il termine "sicuro" ha un chiaro significato, ma non fornisce un valore numerico, che può essere definito studiando i modi di rottura dell'arco (Figg. 20-21). Se in un arco in muratura le imposte si allontanano il valore della spinta diminuisce ed esisterà un valore di spinta alle imposte  $H_{min}$  per valori più bassi del quale l'arco collassa. Esiste in corrispondenza, un massimo valore possibile  $H_{max}$  se le imposte dell'arco si avvicinano. A questi due valori estremi della spinta corrispondono due configurazioni estreme del poligono funicolare. Quindi malgrado l'incertezza pratica delle condizioni dei vincoli esterni dell'arco, è possibile ottenere dei valori numerici per almeno una grandezza strutturale.

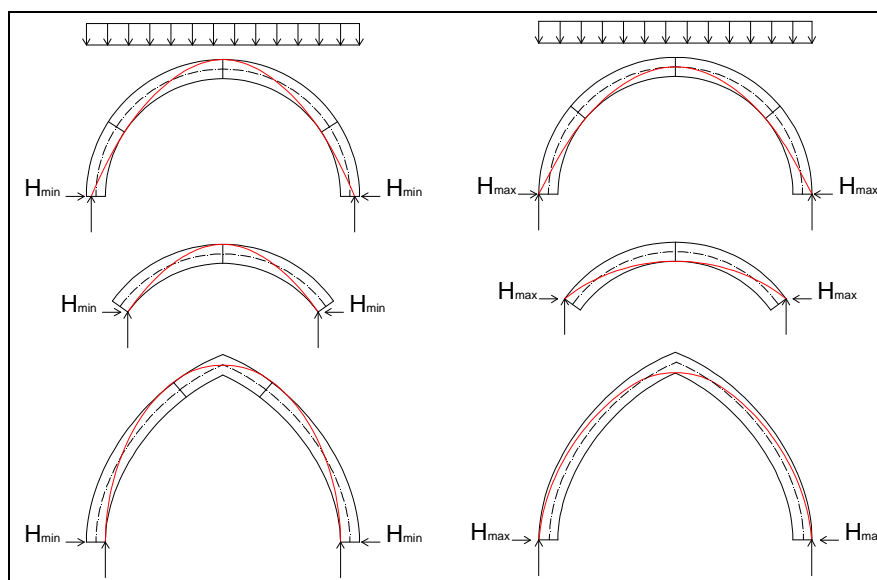


Fig. 20 Meccanismi di collasso superiori ed inferiori per diversi tipi di arco sotto l'azione di carichi uniformi e peso proprio

La determinazione del *coefficiente geometrico di sicurezza*  $\gamma$ , che rappresenta il rapporto tra lo spessore reale "s" e quello minimo teorico "s" necessario per contenere la linea delle pressioni, discende sempre dal Teorema della sicurezza (o del limite inferiore). Quindi: se è possibile, all'interno dello spessore dell'arco in esame, trovarne un altro equilibrato in grado di sopportare i carichi agenti,

quest'ultimo, è in sicurezza e l'arco di partenza lo è a maggior ragione in quanto il suo intradosso ed estradosso sono più distanti dalla linea delle pressioni. Inoltre se l'arco "interno" è in condizione di incipiente collasso (coefficiente di sicurezza =1), allora l'arco di partenza ha rispetto alla condizione limite un margine di sicurezza > 1 quantificabile geometricamente dal rapporto tra il suo spessore e quello dell'arco interno.

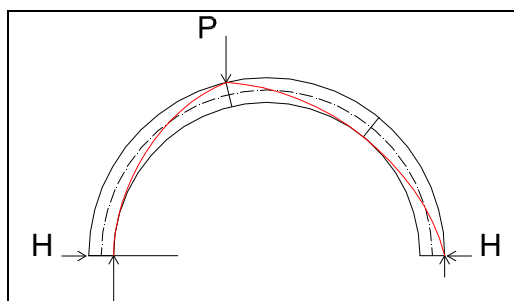


Fig. 21 Meccanismo di collasso di un arco a tutto sesto sottoposto a peso proprio e un carico concentrato

Si consideri lo schema seguente

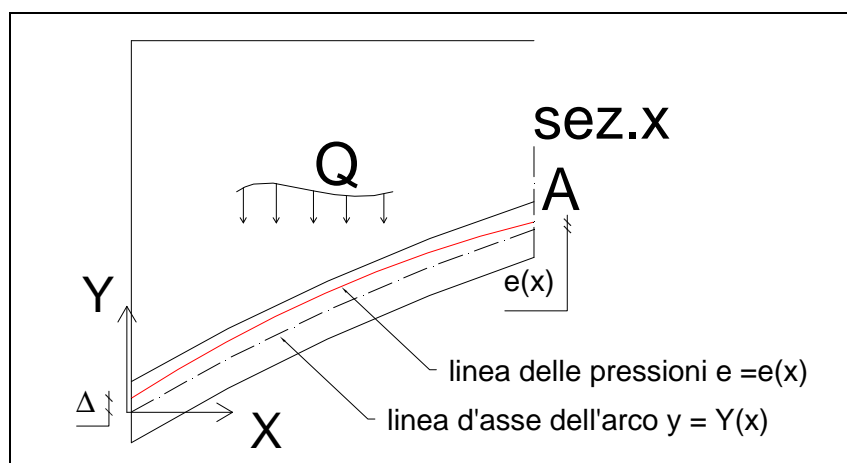


Fig. 22 Linea delle pressioni e asse geometrico di un arco

Con un semplice equilibrio alla rotazione attorno al punto A di intersezione della linea delle pressioni con la sezione di ascissa x, si può scrivere:

$$e(x) = e_0 - Y(x) + \frac{V}{H} x - \frac{1}{H} \sum_1^n p_i (x - x_i)$$

che esprime l'eccentricità, assunta positiva verso l'alto, della linea delle pressioni rispetto al baricentro di una generica sezione verticale di ascissa x dell'arco.

dove:

- $e_0$  = eccentricità all'imposta ( $x=0$ ),
- $Y(x)$  = equazione della linea d'asse dell'arco nel sistema di riferimento assunto,
- $V$  = reazione verticale all'imposta,
- $H$  = spinta orizzontale dell'arco.

Incognite iperstatiche:  $e_0$ ,  $H$  e  $V$  (o meglio  $V/H$ ).

In questa relazione si è sostituita all'integrale che esprime la risultante dei momenti statici delle forze a sinistra del punto A, la sommatoria di termini finiti, ciò presuppone

una preventiva discretizzazione dell'arco ed una valutazione dei valori discreti non solo dei carichi esterni, ma anche dei pesi propri dei conci.

Per ottenere lo spessore teorico dell'arco, necessario a contenere la curva delle pressioni occorre minimizzare per l'intero arco la distanza tra la linea dell'asse geometrico e quella delle pressioni. L'analisi procede per tentativi. La curva delle pressioni è ovviamente continua se i carichi sono distribuiti e presenta dei punti angolosi nel punto di applicazione di carichi concentrati.

Se è semplice la geometria dell'arco e la distribuzione dei carichi, il problema può essere risolto, imponendo ad esempio che la distanza tra il vincolo esterno e la cerniera ai fianchi dell'arco  $e_0 = \Delta$  e che la linea delle pressioni passi per le cerniere plastiche del meccanismo di collasso.

La stessa operazione può essere eseguita per via puramente grafica tracciando il poligono funicolare passante per tre punti noti. In ogni caso è opportuno costruire il grafico della linea delle pressioni o una tabella per agevolare il controllo della soluzione, infatti l'eccentricità non deve mai superare il valore corrispondente allo spessore  $s'$ .

Con questa impostazione possono essere risolti i seguenti problemi:

**PROBLEMA 1:** *nota la geometria dell'arco, il suo spessore ed il sistema dei carichi agenti, si richiede il coefficiente di sicurezza dell'arco.*

Fissato il meccanismo di collasso in funzione della tipologia dell'arco e del tipo di carico ed ipotizzate, per via iterativa, diverse configurazioni della linea delle pressioni si perviene velocemente alla determinazione dello spessore minimo. Nel caso di carichi concentrati e per geometrie particolari (p.e. archi policentrici, o spessori variabili), il meccanismo di collasso potrebbe subire delle piccole variazioni rispetto ai casi generici, di cui ci si rende conto nel corso della procedura; inoltre per i carichi mobili (come nel caso dei ponti), bisognerebbe testare diverse posizioni degli stessi in modo da individuare quella più svantaggiosa e quindi il minimo coefficiente di sicurezza.

**PROBLEMA 2:** *nota la geometria dell'arco ed il sistema dei carichi di progetto, si richiede la determinazione dello spessore dell'arco che assicuri un determinato coefficiente di sicurezza  $\gamma$ .*

Questo problema è del tutto analogo al precedente; una volta determinato lo spessore minimo  $s'$  dell'arco in condizioni di incipiente collasso sotto i carichi di progetto, si ricaverà lo spessore voluto come  $s = s'\gamma$ .

**PROBLEMA 3:** *nota la geometria dell'arco ed il sistema dei carichi di progetto si richiede la determinazione del valore del carico ultimo.*

In questo caso il valore del carico (variabile) ultimo, distribuito o concentrato, comparirà tra le incognite, mentre risulterà nota l'eccentricità della linea delle pressioni, in quanto tangente all'estradosso e all'intradosso dell'arco nelle cerniere ( $\gamma=1$ ). Eventualmente si potrebbe anche pensare di applicare comunque un coefficiente di sicurezza maggiore di 1 (le cerniere non arriveranno al limite della sezione trasversale) per contenere l'entità delle tensioni. Questo problema richiede l'impiego di semplici strumenti come equazioni di equilibrio analitico o grafico e non è influenzato da condizioni al contorno, quali cedimenti di piccola entità o la "storia dei carichi" della struttura. Il problema potrebbe essere risolto anche con l'analisi plastica classica e con il principio dei lavori virtuali.

Come esempio il metodo di Heyman è stato applicato ad un arco a tutto sesto in muratura di raggio  $r = 3,00$  m, sezione  $0,50 \cdot 0,45$  m, peso proprio  $g = 20$  KN/m<sup>3</sup>; modulo elastico  $E = 5000$  MPa, soggetto al solo peso proprio.

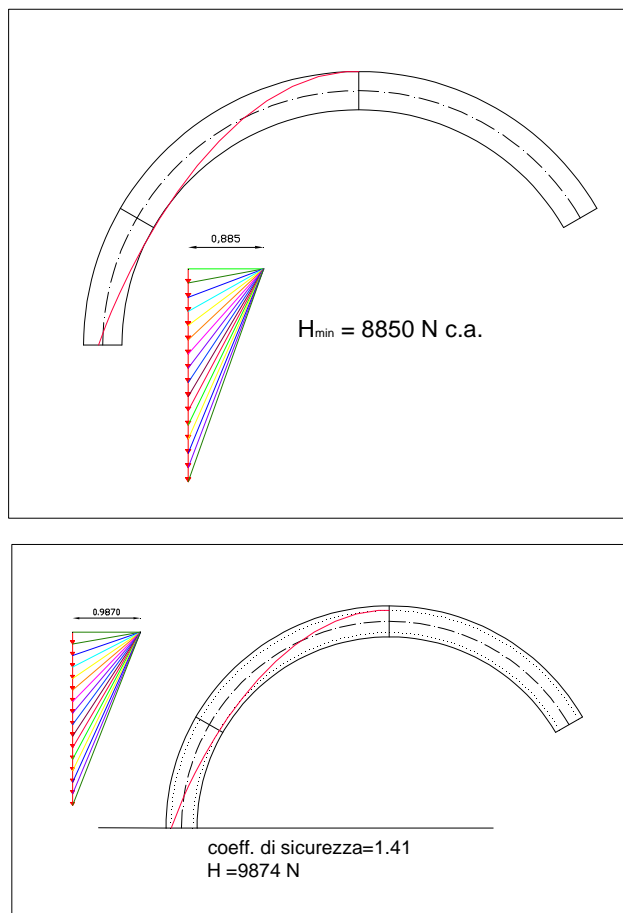


Fig. 23 Applicazione grafica del metodo di Heyman

#### 4. Osservazioni sul metodo Navier-Mery

Il metodo del Mery, applicato con successo da oltre un secolo, trova proprio alla luce della teoria appena illustrata una sua legittimazione teorica. In effetti, quando si effettua la verifica facendo riferimento ad una arbitraria linea delle pressioni che passa all'estradosso in chiave e all'intradosso ai reni e si richiede che ovunque essa sia contenuta dentro il terzo medio della sezione, in sostanza si ipotizza un meccanismo di collasso e si richiede un coefficiente di sicurezza pari a tre (rapporto tra il terzo medio e l'intero spessore). I suoi limiti sono nell'applicabilità a soli archi circolari in condizioni di geometria e carico simmetrici e nel valore del coefficiente di sicurezza, in genere è accettabile un coefficiente di sicurezza pari a due ("middle half rule", in contrapposizione a "middle third rule").

Il metodo è stato applicato ad un arco a tutto sesto in muratura di raggio  $r = 3,00$  m, sezione  $0,50 \cdot 0,45$  m, peso proprio  $g = 20$  KN/m<sup>3</sup>; modulo elastico  $E = 5000$  MPa, soggetto al solo peso proprio.

Come si osserva (Fig. 24) la linea delle pressioni tracciata secondo le ipotesi del Mery fuoriesce dai limiti del terzo medio nei tratti indicati in figura e addirittura nel tratto prossimo all'imposta è esterna alla sezione ad indicare una condizione di equilibrio impossibile. Questo conferma che l'arco in esame sottoposto, al solo peso proprio, non ha un coefficiente di sicurezza pari a 3 come è implicito nel metodo (Fig. 23 – Heyman-coefficiente di sicurezza  $\gamma \approx 1,41$ ).

Il metodo è quindi accettabile come un metodo progettuale sensato e molto conservativo.

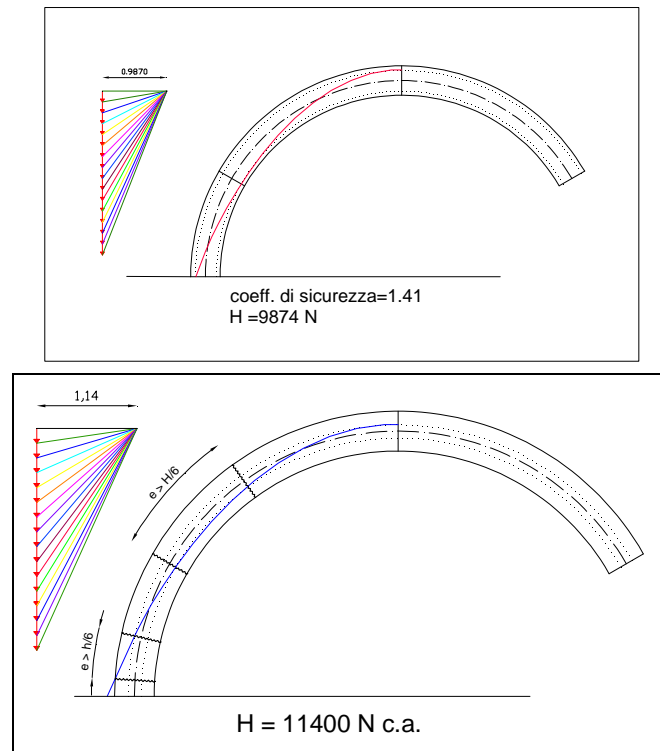


Fig. 24 Applicazione grafica del metodo di Navier-Mery

## 5. L'arco a tre cerniere classico

Si è voluto riportare questo esempio per avere un valore confrontabile con gli altri ottenuti con altri metodi.

Con le classiche equazioni di equilibrio elastico si è definita  $H_{\min}$  la spinta sui piedritti nel caso di cerniera all'imposta ed in chiave,  $H_{\max}$  nel caso di cerniera in chiave e ai reni.

Assunto l'arco a tutto sesto di raggio  $r = 3,00$  m, sezione  $0,50 \cdot 0,45$  m, peso proprio  $g = 20$  KN/m<sup>3</sup>; modulo elastico  $E = 5000$  MPa ed un arco ribassato,  $\alpha = 54^\circ$ , con le stesse caratteristiche fisico meccaniche, dall'equilibrio elastico si ottiene:

arco a tutto sesto:  $H_{\min} = 7458$  N  $\leq H \leq H_{\max} = 9678$  N,  
 arco a sesto ribassato:  $H_{\min} = 7426$  N  $\leq H \leq H_{\max} = 18728,6$  N.

## 6. Soluzioni ottenute con la modellazione FEM

### 6.1. Soluzione elastica con elemento beam

Sono stati modellati con semplici elementi *beam*, con un programma commerciale gli stessi archi analizzati in precedenza ipotizzando che siano costituiti da un materiale omogeneo con caratteristiche medie.

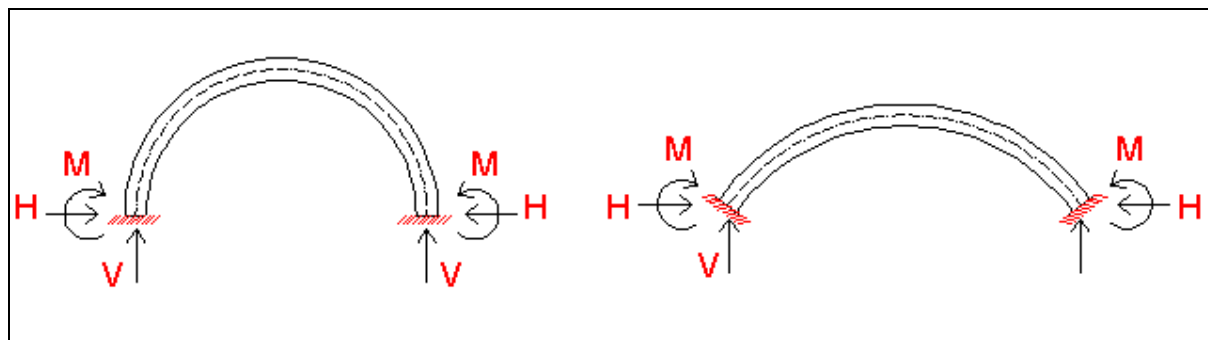


Fig. 25 Archi modellati con elementi *beam*

La soluzione elastica porge:

Arco a tutto sesto:

$$\begin{aligned} V &= 21184 && \text{N} \\ H &= 8428 && \text{N} \\ M &= 3918 && \text{Nm} \\ M_c &= 1812 && \text{Nm} \end{aligned}$$

Arco ribassato:

$$\begin{aligned} V &= 12710 && \text{N} \\ H &= 10510 && \text{N} \\ M &= -520 && \text{Nm} \\ M_c &= 700 && \text{Nm} \end{aligned}$$

Si può subito osservare che nel caso dell'arco a tutto sesto l'eccentricità  $e = M/N$  dell'azione normale sia di 18 cm circa all'imposta e 21 cm in chiave, ben oltre il nocciolo centrale d'inerzia ( $45/6 = 7,5$  cm), il che significa che la sezione è parzializzata e quindi fessurata.

Supponiamo ora di considerare sulle stesse strutture un cedimento orizzontale delle imposte di 1,00 mm, le reazioni vincolari assumono i valori:

Arco a tutto sesto:

$$\begin{aligned} V &= 21184 && \text{N} \\ H &= 3849 && \text{N} \\ M &= -4809 && \text{Nm} \\ M_c &= 6821 && \text{Nm} \end{aligned}$$

Arco ribassato:

$$\begin{aligned} V &= 12710 && \text{N} \\ H &= -30835 && \text{N} \\ M &= -33866 && \text{Nm} \\ M_c &= 18471 && \text{Nm} \end{aligned}$$

Come è ovvio per un cedimento verso l'esterno di entità minima la soluzione ha subito un cambiamento radicale:

- la spinta è diminuita del 120% nell'arco a tutto sesto e si è invertita nell'arco a sesto ribassato
- i momenti hanno assunto valori incompatibili con la realtà, perché presuppongono che la linea delle pressioni sia fuoriuscita dai limiti della sezione.

Questa impostazione deve fare i conti col ben noto comportamento non lineare della muratura e con la difficoltà di attribuire ad essa dei parametri meccanici medi significativi, aspetti che già da soli sollevano dei dubbi sulla legittimità della



soluzione. Il comportamento globale del “materiale” muratura è sensibilmente non lineare già in campo elastico. Ogni qual volta l’azione interna di compressione, per lo più prevalente, assume un’eccentricità eccessiva, si verifica la parzializzazione delle sezioni e l’arco si fessura, in genere, in corrispondenza dei giunti di malta. Questo ovviamente altera la deformabilità della struttura in funzione dell’entità dei carichi agenti, invalidando i presupposti di proporzionalità dei metodi elastici.

### 6.2. Soluzione elastica a conci differenziati

Esaminiamo ora una modellazione elastica tridimensionale FEM (programma SAP), in coordinate cilindriche, dello stesso arco a tutto sesto nel quale sono stati differenziati, con diverse proprietà meccaniche, gli elementi “conci” e gli elementi “giunti di malta”:

Materiale 1 (conci in pietra)		Materiale 2 (malta)	
E =	30000 MPa	E =	5000 MPa
$\gamma$ =	24,00 kN/m <sup>3</sup>	$\gamma$ =	20,00 kN/m <sup>3</sup>
v =	0,15	v =	0,15



Fig. 26 Arco modellato con elementi “conci” e “giunti di malta”

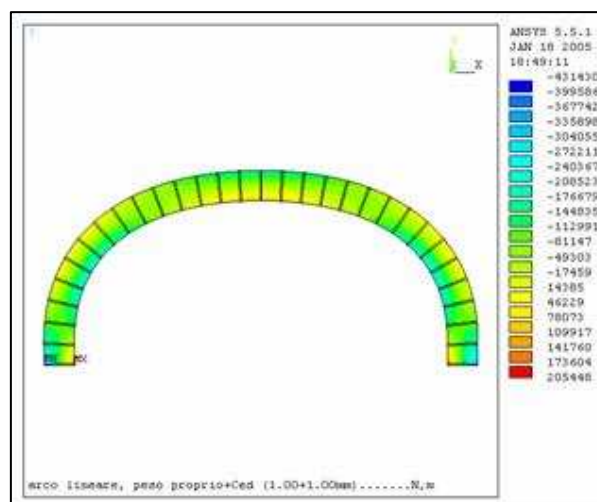


Fig. 27 Tensioni tangenziali relative alla condizione di carico di solo peso proprio

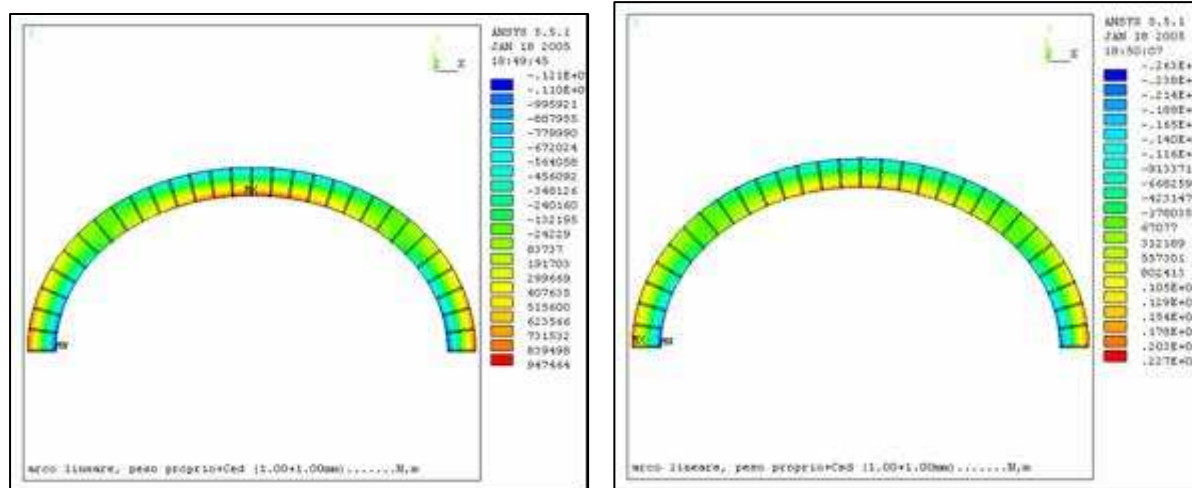


Fig. 28 Tensioni tangenziali relative rispettivamente alle condizioni di carico di peso proprio e cedimento orizzontale di 1 mm e 2 mm.

Valori delle reazioni

Calcolo elastico senza cedimento

V = 25160 N

H = 9781 N

Calcolo elastico con cedimento di 1 mm

V = 25160 N

H = -8807 N

Calcolo elastico con cedimento di 2 mm

V = 25160 N

H = -27397 N

L'elevata rigidezza del modello derivata dai valori scelti per caratterizzare i materiali genera l'inversione del segno della spinta e causa per il cedimento di 1 mm sforzi di trazione nel materiale dell'ordine di  $1,00 \text{ N/mm}^2$ ; e per quello di 2 mm sforzi di  $2,00 \text{ N/mm}^2$ .

L'analisi elastica senza cedimenti, offre valide indicazioni sull'andamento delle tensioni interno e dei punti maggiormente sollecitati.

### 6.3. Soluzione in campo non lineare con programma di calcolo avanzato

Per simulare la struttura sono stati utilizzati due tipi di elementi: elastici lineari omogenei isotropi che simulano i conci dell'arco e monodimensionali (Fig. 29), in grado di lavorare a compressione o trazione e attrito, atti a modellare il contatto non lineare tra nodo e nodo.



Fig. 29 Elemento *point-contact*

Gli elementi monodimensionali sono stati posizionati in sezioni particolari a seconda del meccanismo di collasso ricercato. Una valida indicazione sulla loro posizione è fornita dal calcolo lineare che offre indicazioni sulle sezioni più sollecitate.

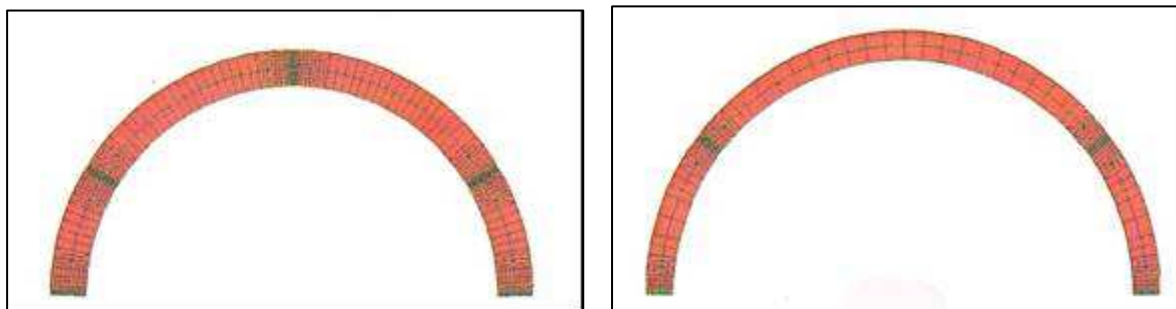


Fig. 30 Meccanismi di collasso del modello completo

Un primo calcolo del modello, nel quale si è ipotizzato come vincolo esterno l'incastro, non ha dato risultati attendibili, in quanto l'incastro non permette gli spostamenti (arco-piedritto) che regolano i meccanismi di rottura. Inoltre l'ipotesi di vincolo rigido crea un meccanismo di collasso nel quale si formano dapprima le fessure alle imposte, successivamente quelle in chiave ed infine alle reni, mentre in letteratura è definito come meccanismo di collasso attivo quello di rototraslazione nel quale le imposte si allontanano, con una leggera rotazione intorno all'estradosso, si ha la formazione di tre cerniere due all'intradosso nei fianchi dell'arco ed una all'estradosso in chiave.

Dopo vari tentativi e modellazioni nei quali si è agito sul grado di vincolo, sulla posizione delle cerniere ai fianchi dell'arco, sono stati introdotti cedimenti, forze alle imposte che garantissero l'equilibrio, si sono ottenuti i valori di  $H_{min}$  e  $H_{max}$  in grado di offrire il coefficiente di sicurezza minore.

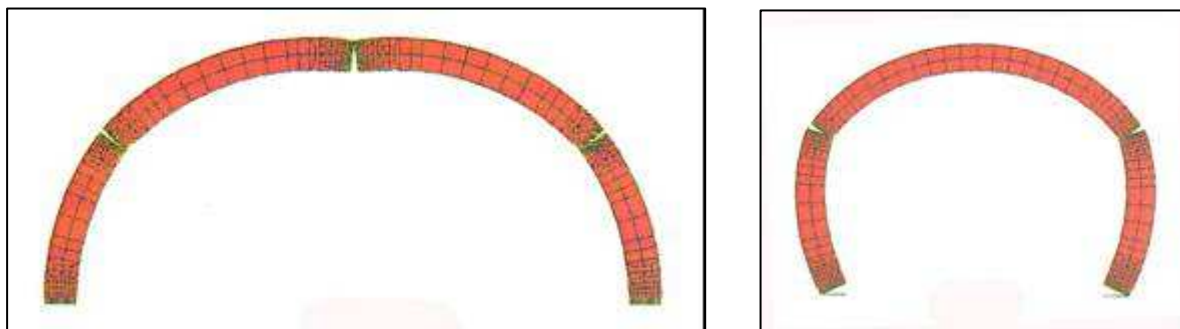


Fig. 31 Visualizzazione delle cerniere plastiche al limite di collasso

Il risultato è soddisfacente ed attendibile, si deve tenere comunque conto dei numerosi tentativi che sono stati necessari per la simulazione del modello e dei lunghi tempi di calcolo necessari nonostante la semplicità della struttura.

#### 6.4. Soluzione in campo non lineare con programma di calcolo avanzato in grado di gestire soluzioni di continuità

Riproponiamo lo stesso modello dell'arco a tutto sesto di raggio  $r = 3,00$  m, sezione  $0,50 \cdot 0,45$  m, peso proprio  $g = 20$  KN/m<sup>3</sup>; modulo elastico  $E = 5000$  MPa, risolto in campo non lineare, impostando un criterio di rottura per il materiale dei giunti del tipo

Mohr-Coulomb con un limite di trazione massima pari a  $0,1 \text{ N/mm}^2$  e nessun limite alla compressione, quindi senza possibilità di rottura per schiacciamento.

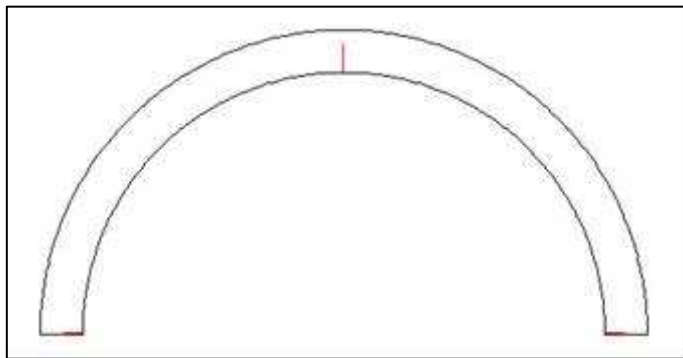


Fig. 32 Fessurazione del modello FEM non lineare, senza cedimenti

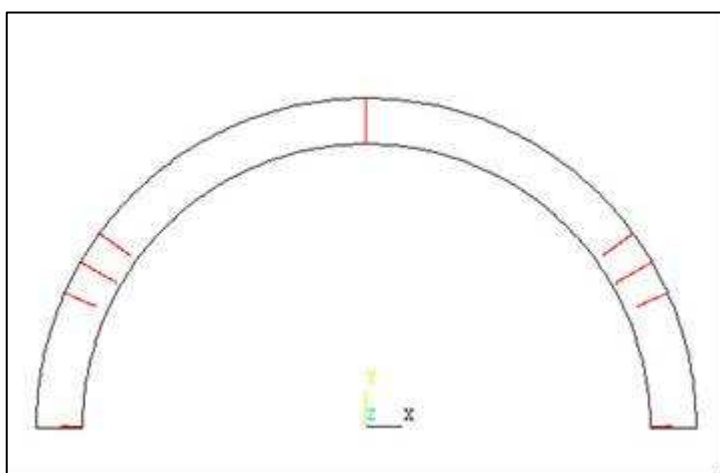


Fig. 33 Fessurazione del modello FEM non lineare, cedimento di 1,00 mm

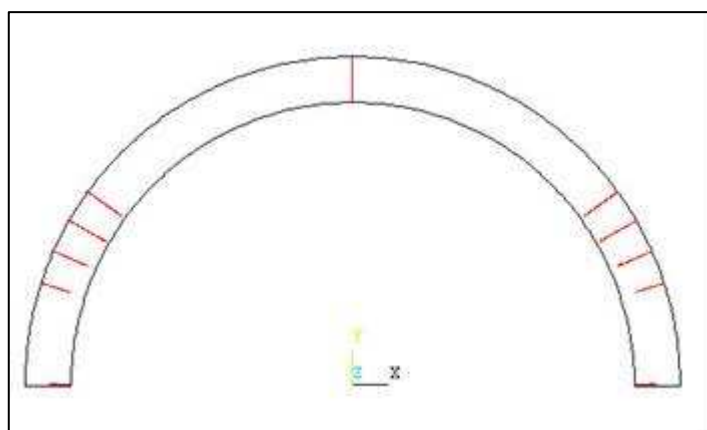


Fig. 34 Fessurazione del modello FEM non lineare, cedimento di 2,00 mm

Coerentemente con quanto è stato già rilevato sommariamente dall'analisi elastica, per effetto del solo peso si ha la fessurazione delle sezioni in chiave e alle imposte. Con l'applicazione di un cedimento di 1 mm si evidenzia il meccanismo di rottura, tipico degli archi a tutto sesto per cedimento verso l'esterno, poiché la linea delle pressioni si colloca all'estremo superiore della sezione in chiave (si noti che la sezione è del tutto fessurata) e tangenzialmente nelle sezioni alle reni (la fessura più profonda è esattamente nel giunto collocato a  $33^\circ$  dalla linea di imposta), mentre

nelle sezioni di imposta la fessurazione è profonda ma è evidente che la linea delle pressioni è distante dall'estradosso.

Con un cedimento di 2 mm la situazione non subisce sostanziali variazioni se non un aumento della fessurazione nelle sezioni attorno alle reni.

Valori delle reazioni

Calcolo non lineare senza cedimento

$$V = 25160 \quad \text{N}$$

$$H = 9750,5 \quad \text{N}$$

Calcolo non lineare con cedimento di 1 mm

$$V = 25160 \quad \text{N}$$

$$H = 8852,5 \quad \text{N}$$

Calcolo non lineare con cedimento di 2 mm

$$V = 25160 \quad \text{N}$$

$$H = 8555 \quad \text{N}$$

Come si può constatare il modello risponde correttamente all'imposizione dei cedimenti e la reazione orizzontale all'imposta non subisce illogiche variazioni di valore.

A questo punto è doveroso sottolineare che tale risultato è stato conseguito con un codice agli elementi finiti assai avanzato (ANSYS), che non solo ha implementati diversi criteri di rottura dei materiali, ma che ha un solutore particolarmente versatile nel campo non lineare; eppure la risoluzione di una struttura così semplice ha comunque richiesto qualche ora di elaborazione in un PC di ultima generazione. Questo rende sconsigliabile, se non impraticabile, tale impostazione per la modellazione di strutture complesse. Inoltre questo tipo di modellazioni necessita di una notevole esperienza nel campo da parte dell'operatore.

## 7. Osservazioni

Premesso che nel caso di una struttura esistente siano noti con una "certa" approssimazione: la geometria della struttura, le condizioni al contorno, le caratteristiche fisico-meccaniche del materiale e la storia della struttura è possibile implementare con gli elementi finiti una struttura ad arco.

Da questo excursus si è osservato che la soluzione elastica può fornire risultati attendibili sul regime tensionale e deformativa allo stato limite di esercizio.

La soluzione non lineare, implementata su un programma di calcolo molto avanzato, che sostanzialmente sia in grado di modificare la matrice di rigidezza nei punti in cui il materiale ha raggiunto la crisi, offre risultati molto attendibili a costo di onerosi tempi di calcolo e a patto di una collaudata esperienza dell'utilizzatore del programma.

Si è mostrato che, con degli artifici, è possibile utilizzare programmi commerciali meno sofisticati, sempre *sub condicione* di grande esperienza e conoscenza.

Per simulare l'apertura delle fessure e ottenere quindi una redistribuzione delle tensioni sino a rottura, si potrebbe ancora utilizzare il metodo elastico lineare con un processo iterativo *step-by-step* sino a rottura, a patto di intervenire manualmente sui dati di input, infittendo la mesh nei punti maggiormente sollecitati e realizzando la discontinuità in quei punti.

## 8. Modellazione FEM di volte in muratura

L'estensione del calcolo a rottura degli archi alle volte si semplifica se si accetta, in linea del tutto generale, che in prossimità del collasso la volta si suddivida in una serie di archi non (o solo parzialmente) collaboranti tra loro, riportando quindi la valutazione del loro coefficiente di sicurezza a quella di un sistema di archi semplici (Fig. 35).

Un valido aiuto per l'individuazione dei meccanismi di collasso è offerto dalla modellazione di tipo elastico che è in grado di evidenziare la *risposta* deformativa della struttura e le zone maggiormente sollecitate.

L'estensione immediata dell'arco è la volta a botte. Occorre però valutare l'effetto irrigidente di elementi strutturali quali eventuali incatenamenti, frenelli, rinfianchi strutturali ecc., la reale distribuzione dei carichi e la tecnologia costruttiva della volta (i.e. semplici archi ripetuti o ammortati tra loro).

Per le volte composte, a padiglione, a crociera, a vela ecc. il problema è più complesso e richiede un'accurata interpretazione del meccanismo resistivo. Nel caso delle volte ottenute come intersezione di volte a botte, occorre tener presenti gli archi diretti secondo le direttrici delle botti e quelli determinati dalle intersezioni delle stesse. Tali intersezioni, non a caso spesso rinforzate con costolature, sono zone di concentrazione di tensioni per il repentino cambio di curvatura e spesso sono il punto critico della struttura.

Nelle volte a padiglione una tipica manifestazione di dissesto è la fessurazione degli archi diagonali, in prossimità delle reni.

Nella cupola emisferica il carico esterno è equilibrato da un sistema di forze interne che possono essere visualizzate secondo i meridiani e i paralleli. Le prime sono forze di compressione e rivelano la presenza di archi discreti, in realtà spicchi, all'interno della struttura; le seconde tengono conto della mutua collaborazione tra i settori di cupola, che nella parte alta si concretizza nel contrasto alla tendenza al rovesciamento verso l'interno, nella parte bassa in un meccanismo auto-cerchiante tramite il quale la cupola, senza la necessità di supporti rigidi, è in grado di contenere la spinta in direzione radiale. In regime elastico questo meccanismo di resistenza per forma si sviluppa a prezzo di forti deformazioni e di tensioni di trazione, che nella teoria membranale, riguardano la fascia contenuta entro circa  $48,2^\circ$  di latitudine (Fig. 36-38). Ovviamente questo meccanismo non può svilupparsi spontaneamente in una cupola in muratura o in opus cementicium e richiede perciò dei supporti rigidi ed un contrasto alla deformazione radiale, per mezzo di muri di notevole spessore (muri di 6 m contrastano la spinta della cupola del Pantheon di 43 m di diametro), contrafforti, contrasto di semicupole (i.e. Istanbul - S Sofia - 532-537 d.C.), cerchiature metalliche ecc.. E' da osservare che spesso questi espedienti non sono tali da impedire del tutto gli effetti determinati dalla deformazione in direzione radiale e cioè la fessurazione lungo i meridiani che dalle imposte risale verso l'apice (cfr. Poleni e Cupola di San Pietro). La verifica del grado di sicurezza deve ancora una volta essere condotta col calcolo a rottura, riferendosi al collasso degli spicchi in cui si suddivide la cupola, dall'imposta fino alla zona non fessurata, che in genere si attesta ad una distanza di circa  $25^\circ$  dall'apice. Il coefficiente di sicurezza e i valori limite della spinta si determinano in accordo con quanto già visto; se le porzioni di cupola così individuate sono in condizioni di sicurezza, lo stesso potrà dirsi dell'intera cupola, in realtà tale approccio può essere spesso fin troppo conservativo. È inoltre semplice verificare che il livello di sforzo è mediamente molto basso rispetto alla tensione di rottura di una muratura qualsiasi.

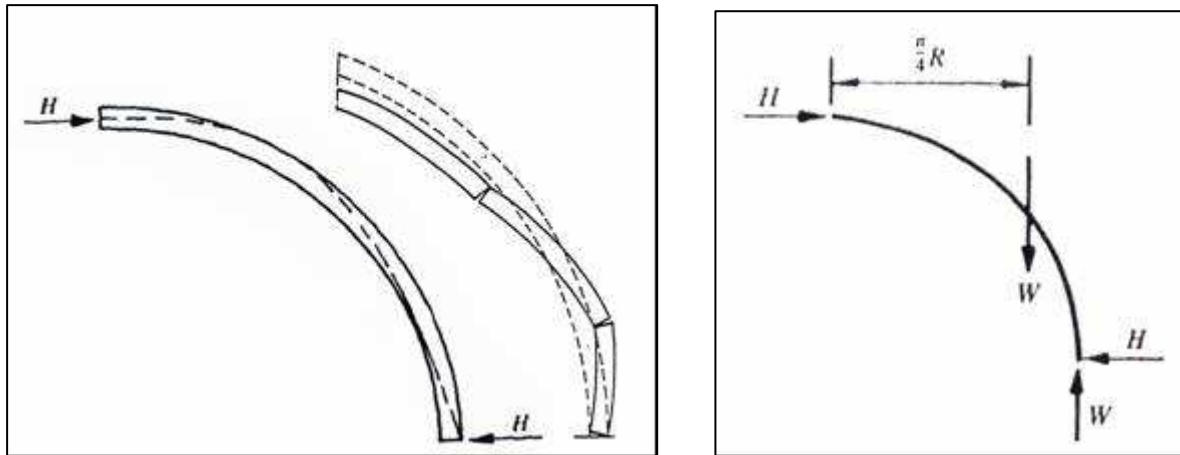


Fig. 35 Meccanismo di collasso a 4 cerniere di uno spicchio di cupola e sistema delle forze in gioco

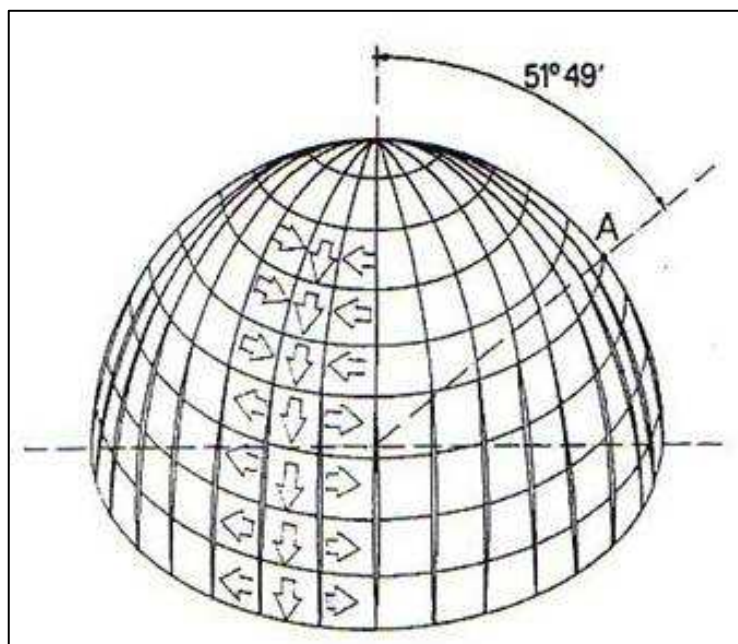


Fig. 36 Comportamento tensionale dei meridiani di una cupola

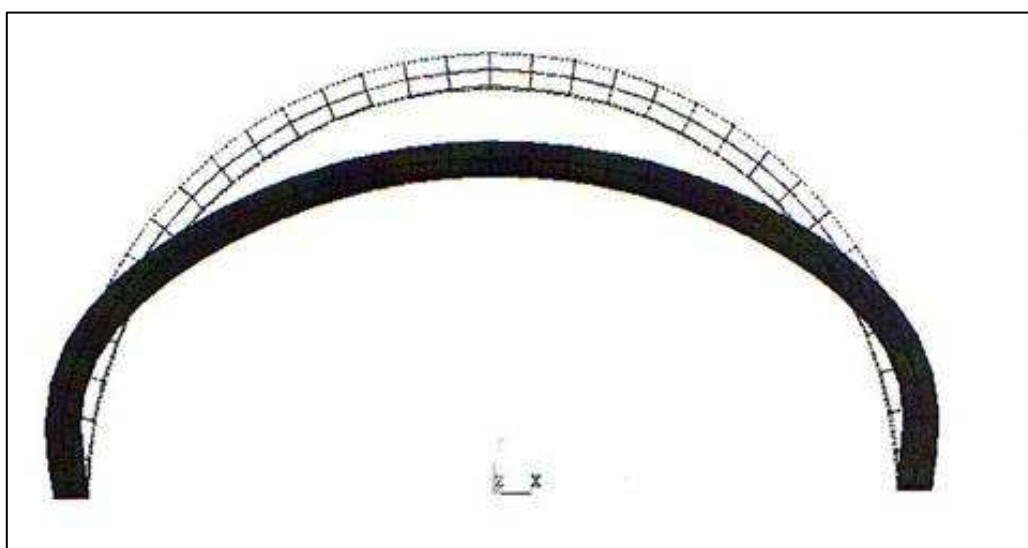


Fig. 37 Modellazione lineare FEM e deformata di una cupola SLE

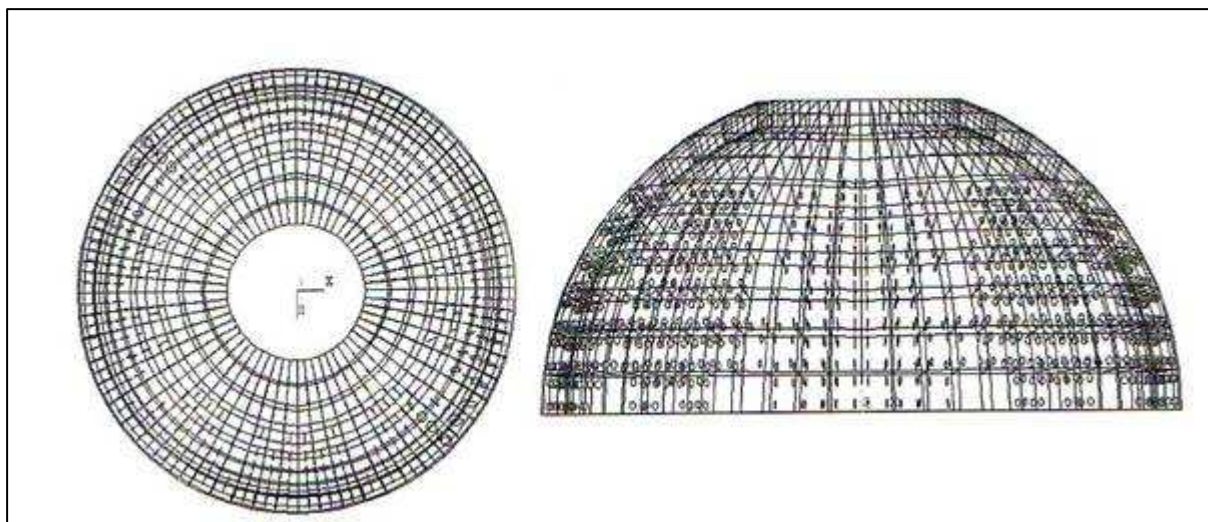


Fig. 38 Modellazione non lineare FEM e fessurazione di una cupola

Si riporta come esempio la cupola a sezione ottagonale della chiesa di S. Lucifero a Cagliari.

Per contenere le spinte sono stati predisposti, in epoca recente, dei cordoli in c.a. (Fig. 39), i quali però non hanno impedito la profonda fessurazione e in compenso hanno favorito ulteriori problemi da riferirsi all'incompatibilità delle deformazioni per effetto delle escursioni termiche. Un'analisi condotta in campo lineare ha svelato l'inadeguatezza del profilo policentrico con cui è stata progettata, soprattutto dopo l'ampliamento della lanterna. L'analisi elastica prima (Fig. 40) e successivamente quella non lineare (Fig. 41) hanno mostrato inoltre la tendenza, a causa delle maggior rigidità, alla rottura in corrispondenza degli spigoli, sede, come già sottolineato, di concentrazione delle tensioni.

Un'analisi a rottura della cupola può essere condotta valutando il coefficiente di sicurezza degli spicchi in cui essa si suddivide.

Alla luce di quanto affermato emerge come la lesione lungo i meridiani sia di per sé un fatto fisiologico e non necessariamente indice di incipiente collasso; diverso peso assumono le lesioni dirette secondo i paralleli sia intradossali che estradossali perché svelano la formazione delle cerniere che possono condurre alla formazione di un meccanismo.

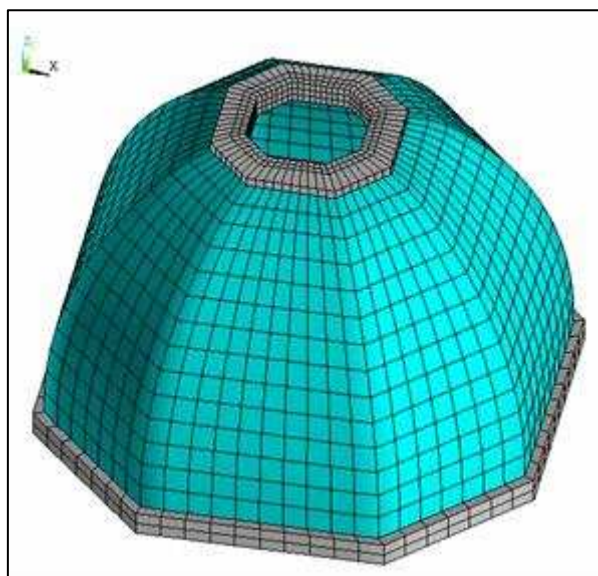


Fig. 39 Modellazione FEM della cupola di San Lucifero a Cagliari



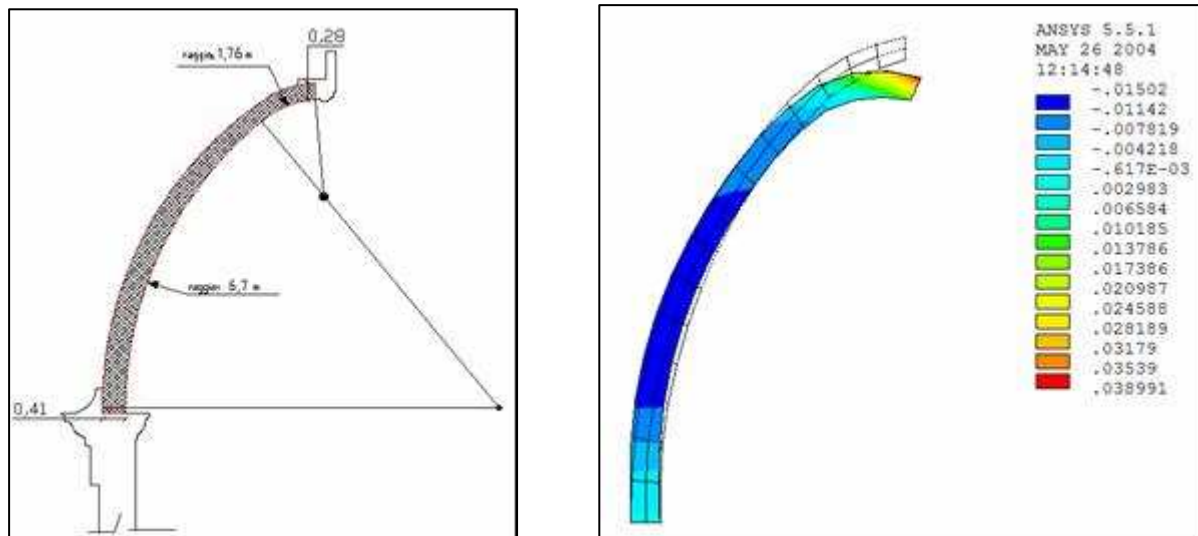


Fig. 40 Geometria della sezione e deformata elastica della cupola di San Lucifero a Cagliari

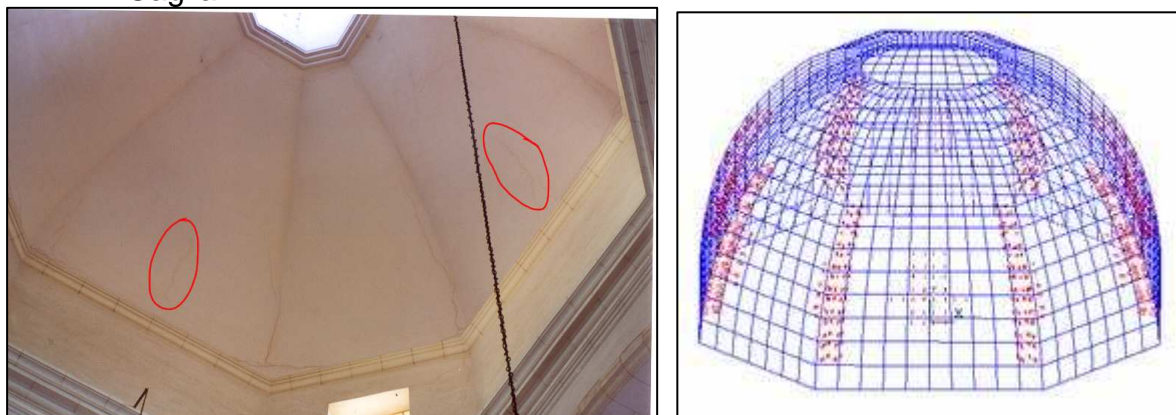


Fig. 41 Foto delle fessure e andamento delle fessure ottenute con il calcolo non lineare della cupola di San Lucifero a Cagliari

## 9. Bibliografia

**Pizzetti G., Zorgno Trisciuglio A.M.**, *Principi statici e forme strutturali*, UTET, 1980.

**Benvenuto E.**, *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo teorico*, Sansoni 1981.

**Heyman J.**, *The stone skeleton: structural engineering of masonry architecture*, Cambridge university, 1995. Heyman, J., (1995),

**Heyman J.**, *The masonry arc*, Ellis Horwood limited, 1982.

**Bull, J.W.**, *Computational Modelling of Masonry, Brickwork and Blockwork Structures*, Bell & Bain, Glasgow, 2001.

**Onida R., Strina P.**, *I meccanismi di collasso di strutture spingenti: approccio agli elementi finiti*, tesi di laurea della Facoltà di Ingegneria, relatori De Nicolo-Odoni, A.A.1999-2000.

**Ricotta E., Agrimi P.**, *Analisi degli studi italiani sulla statica degli archi*, Corso di Architettura e Composizione Architettonica, rel. Prof. De Felice.

**Ronca P.**, *Valutazione del coefficiente di sicurezza statica delle volte sottili in muratura*, Studi e Ricerche, Scuola di specializzazione in Costruzioni in c.a. – Fratelli Pesenti Vol. 19, 1998.

**Ranieri G., De Nicolo B., Melis R.,** *Inspection and determination of the stability condition of Nuraghe Orgono (Sardinia, Italy), by means integrated methods*”, 7<sup>th</sup> International Conference on Inspection Appraisal repairs & maintenance of buildings & structures, ISBN 981-04-2514-7, 11-13 September Nottingham, 2001.

**De Nicolo B., Mistretta F., Mossone P., Odoni Z.,** *Structural restoration of masorny very old lighthouse*, 10<sup>TH</sup> International Conference and exhibition, Structural faults and repair, 3-5 July, ISBN 0-947644-53-9, London, 2003.

**De Nicolo B., Odoni Z., Pani L.,** *Structural repair of brick masonry chimneys*, System-based Vision for Strategic and Creative Design, Bontempi (ed.) 2003, Zwets & Zeitlinger, Lisse, ISBN 90 5809 599 1, ISEC-02, pp 1487 –1493.

**Pani L., De Nicolo B., Odoni Z.,** *Cracking simulation in a plain structure by mean finite element method*, Structural Analysis of Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques” ISBN 04 1936 3799 Balkema Publishers, Padova 10-13 novembre 2004 pp. 695-700.