

Abstract della Tesi:

Propagazione stazionaria di un danneggiamento in un solido snello su appoggio elastico. Modello Analitico.

Introduzione

Il domino è un antico gioco nato nel XII secolo da uno statista cinese. Oltre al suo utilizzo più comune, le tessere del domino vengono utilizzate per un particolare gioco di abilità. Si dispongono verticalmente una a poca distanza dall'altra e, dando l'innesco con la prima tessera, esse vanno a cadere riproducendo un peculiare effetto a catena denominato effetto domino. L'effetto domino non è altro che una riproduzione ben nota di onda di transizione, che raggiunge velocemente, dopo un breve transitorio, un regime stazionario di propagazione, in cui la velocità risulta costante.

In natura, su larga scala, vi sono casi spettacolari in cui si può assistere alle onde di transizione, governate dalla forza di gravità. Tra questi fenomeni naturali si possono osservare fenomeni eclatanti come le valanghe di neve e le frane.

Su scala differente, si possono attivare sistemi simili allo scorrimento da valanga, a seguito dell'interazione tra la microstruttura e i diversi componenti del macrosistema.

La maggior parte delle onde di transizione osservate nei sistemi, come per i giubbotti antiproiettile, i caschi da corsa in caso d'urto, la frattura nei solidi guidati dall'onda d'urto, sono variabili nel tempo. Per alcune onde strutturali trasmesse, invece, l'onda di transizione può stabilizzarsi raggiungendo un regime stazionario.

Vi sono alcuni esempi abbastanza recenti che riproducono il collasso strutturale attraverso un regime stazionario. In Texas, nel 29 dicembre del 2003, il lungo ponte di San Saba collassò a seguito di un enorme incendio, Fig.1; nel 28 marzo 2014, nella provincia cinese del Guanxi, si demolì un ponte attraverso il solo innesco del danno, ad una delle due estremità, tramite un escavatore, Fig.2.

Questi collassi sono stati innescati da un fattore esterno, quali l'escavatore e l'incendio, che hanno dato l'avvio alla rottura della struttura generando un effetto domino.

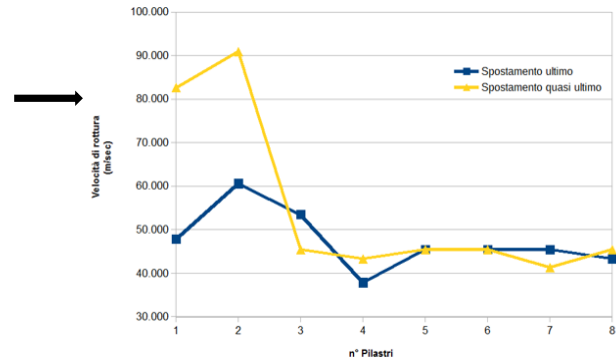


Fig.1





Fig.2



Queste recenti osservazioni forniscono una prova sperimentale, che sostiene una teoria basata sul concetto di trasmissione dell'onda di rottura. Nessuno penserebbe ad un'analogia tra una valanga di neve e una di queste strutture ingegneristiche. Tuttavia, entrambi questi fenomeni possono essere descritti nel contesto di un modello di propagazione stazionario dinamico di un'onda di transizione governata dalla gravità.

In questo lavoro di tesi è proposto un modello analitico di propagazione della rottura all'interno di una struttura da ponte, schematizzata attraverso un modello di trave su supporto elastico. La rottura è identificata come una riduzione della massa distribuita, della rigidità flessionale e della rigidità del supporto.

L'analisi di propagazione stazionaria, guidata dalla rottura gravitazionale, identifica i regimi di stabilità della propagazione. Sono definiti tre differenti regimi: subsonico, intersonico, supersonico. Le condizioni di propagazione della rottura sono analizzate per diverse classi di danneggiamento strutturale.

Modello di trave su supporto elastico

Nello studio si è utilizzato il modello Eulero-Bernoulli per la trave su appoggio elastico, la cui equazione dinamica è:

$$EJ \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \kappa w(x, t) = \rho A g.$$

Dove w è lo spostamento trasversale, preso positivo verso il basso, κ è la rigidità della fondazione, g è l'accelerazione di gravità. E , J , ρ , A sono rispettivamente il modulo di elasticità, il momento di inerzia, la densità e la sezione della trave.

Per semplicità di scrittura si pone $EJ = D$, rigidità flessionale, e $\rho A = m$, massa per unità di lunghezza:

$$D W^{IV}(\eta) + mv^2 W^{II}(\eta) + \kappa W(\eta) = mg.$$

Con:

$$\kappa = \kappa_1, \quad m = m_1, \quad D = D_1 \quad \text{per } \eta \geq 0,$$

$$\kappa = \kappa_2, \quad m = m_2, \quad D = D_2 \quad \text{per } \eta \leq 0.$$

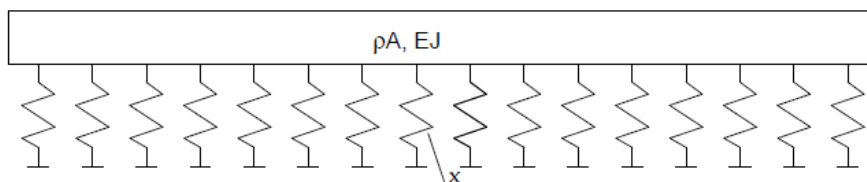


Fig.3 Modello di trave su appoggio elastico continuo.

Modello analitico

Il modello analitico adottato ha previsto come ipotesi:

- Moto stazionario, velocità costante.
- Il cedimento, dipendente soltanto da $\eta = x - vt$, dove v è la velocità dell'onda di rottura:

$$w(x, t) = W(x - vt) = W(\eta)$$

L'equazione di moto dinamico:

$$D W^{IV}(\eta) + mv^2 W^{II}(\eta) + \kappa W(\eta) = mg$$

Sono state effettuate le operazioni di normalizzazione attraverso le grandezze lunghezza caratteristica e tempo caratteristico:

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{D}{\kappa}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\rho A}{\kappa}}$$

Separazione contributo statico e dinamico: $\bar{W} = \tilde{W} - \tilde{g}$

L'equazione di moto diviene:

$$\bar{W}^{IV}(\tilde{\eta}) + \tilde{v}^2 \bar{W}^{II}(\tilde{\eta}) + \bar{W}(\tilde{\eta}) = 0 \quad \text{per } \tilde{\eta} \geq 0$$

$$\hat{D} \bar{W}^{IV}(\tilde{\eta}) + \hat{m} \tilde{v}^2 \bar{W}^{II}(\tilde{\eta}) + \hat{\kappa} \bar{W}(\tilde{\eta}) = \tilde{g}(\hat{m} - \hat{\kappa}) \quad \text{per } \tilde{\eta} \leq 0$$

Dove: $\hat{m} = \frac{m_2}{m_1}$; $\hat{\kappa} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$, $\hat{D} = \frac{D_2}{D_1}$, con il pedice 1 si indicano le grandezze a $\tilde{\eta} \geq 0$ e con il pedice 2 le grandezze a $\tilde{\eta} \leq 0$.

Variazione di rigidezza e massa costante: Cedimento dell'appoggio di fondazione

Si è analizzato per primo il caso più semplice: si ipotizza il collasso della fondazione, il cui cedimento provoca la formazione di una sezione di rottura. Si assume che tale propagazione del danno produca una variazione della rigidezza tra le due parti, anteriore e posteriore alla sezione di rottura, mentre la massa rimane immutata prima e dopo la sezione, Fig.4. Si è focalizzata l'attenzione su quali onde di rottura, legate alla velocità di propagazione dell'onda, producano la trasmissione del danno nella struttura.

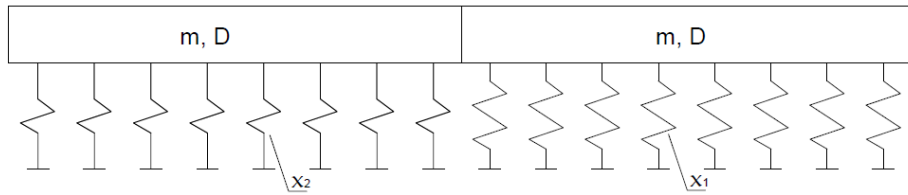


Fig.4 Modello di trave su appoggio elastico continuo, con evidenziata la sezione di rottura.

Le equazioni di studio divengono:

$$\begin{aligned} \bar{W}^{IV}(\tilde{\eta}) + \tilde{v}^2 \bar{W}^{II}(\tilde{\eta}) + \bar{W}(\tilde{\eta}) &= 0 & \text{per } \tilde{\eta} \geq 0 \\ \bar{W}^{IV}(\tilde{\eta}) + \tilde{v}^2 \bar{W}^{II}(\tilde{\eta}) + \hat{\kappa} \bar{W}(\tilde{\eta}) &= \tilde{g}(1 - \hat{\kappa}) & \text{per } \tilde{\eta} \leq 0 \end{aligned}$$

La risoluzione del sistema di equazioni porta all'individuazione di tre intervalli di studio:

- Regime subsonico $0 \leq v \leq \sqrt{2} \hat{\kappa}^{1/4}$
- Regime intersonico $\sqrt{2} \hat{\kappa}^{1/4} \leq v \leq \sqrt{2}$
- Regime supersonico $v \geq \sqrt{2}$

Per quanto riguarda il regime subsonico, si sono determinate le equazioni dello spostamento nei due domini di studio, prima della lesione e dopo la lesione:

$$W(\eta) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2-v^2}\eta} \left[A_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+v^2}\eta\right) + A_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+v^2}\eta\right) \right] \quad \eta \geq 0$$

$$W(\eta) = e^{+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}}-v^2}\eta} \left[B_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}}+v^2}\eta\right) + B_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}}+v^2}\eta\right) \right] \frac{(1-\hat{\kappa})\tilde{g}}{\hat{\kappa}} \quad \eta \leq 0$$

Sono presi i solo contributi legati alle onde che si generano dal punto di transizione, mentre vengono scartati quelle che danno un contributo dall'esterno.

La determinazione delle costanti di integrazione sono ottenute applicando le condizioni di continuità nella sezione di rottura, e sono:

$$A_1 = \frac{Q}{\sqrt{\hat{\kappa}} + \hat{\kappa}} = \frac{Q}{\sqrt{\hat{\kappa}}(1 + \sqrt{\hat{\kappa}})} \quad B_1 = -\frac{Q}{\hat{\kappa} + \sqrt{\hat{\kappa}^3}} = -\frac{Q}{\hat{\kappa}(1 + \sqrt{\hat{\kappa}})}$$

$$A_2 = -\frac{Q(2 + v^2 - \sqrt{2 - v^2}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}} - v^2})}{(1 + \hat{\kappa})\sqrt{\hat{\kappa}}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}} + v^2}(\sqrt{2 - v^2} + \sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}} - v^2})}$$

$$B_2 = -\frac{Q(2\sqrt{\hat{\kappa}} + v^2 - \sqrt{2 - v^2}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}} - v^2})}{(1 + \sqrt{\hat{\kappa}})\hat{\kappa}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}} + v^2}(\sqrt{2 - v^2} + \sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}} - v^2})}$$

Dove $\frac{Q}{\hat{\kappa}} = \left(\frac{1 - \hat{\kappa}}{\kappa}\right) \tilde{g}$.

Stesso procedimento è stato effettuato per gli altri due regimi, di cui si riportano le sole equazioni, per brevità, senza riportare le relative espressioni delle costanti di integrazione:

Regime subsonico $0 \leq v \leq \sqrt{2} \hat{\kappa}^{1/4}$

$$W(\eta) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2-v^2}\eta} \left[A_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+v^2}\eta\right) + A_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+v^2}\eta\right) \right] \quad \eta \geq 0$$

$$W(\eta) = e^{+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}}-v^2}\eta} \left[B_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}}+v^2}\eta\right) + B_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\hat{\kappa}}+v^2}\eta\right) \right] \frac{(1 - \hat{\kappa})\tilde{g}}{\hat{\kappa}} \quad \eta \leq 0$$

Regime intersonico $\sqrt{2} \hat{\kappa}^{1/4} \leq v \leq \sqrt{2}$

$$W(\eta) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2-v^2}\eta} \left[A_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+v^2}\eta\right) + A_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+v^2}\eta\right) \right] \quad \eta \geq 0$$

$$W(\eta) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{v^2}{2} - \sqrt{\frac{v^4}{4} - \hat{\kappa}}}\eta\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{\frac{v^2}{2} - \sqrt{\frac{v^4}{4} - \hat{\kappa}}}\eta\right) + \frac{(1 - \hat{\kappa})g}{\hat{\kappa}} \quad \eta \leq 0$$

Regime supersonico $v \geq \sqrt{2}$

$$W(\eta) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{v^2}{2} + \sqrt{\frac{v^4}{4} - 1}}\eta\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{v^2}{2} + \sqrt{\frac{v^4}{4} - 1}}\eta\right) \quad \eta \leq 0$$

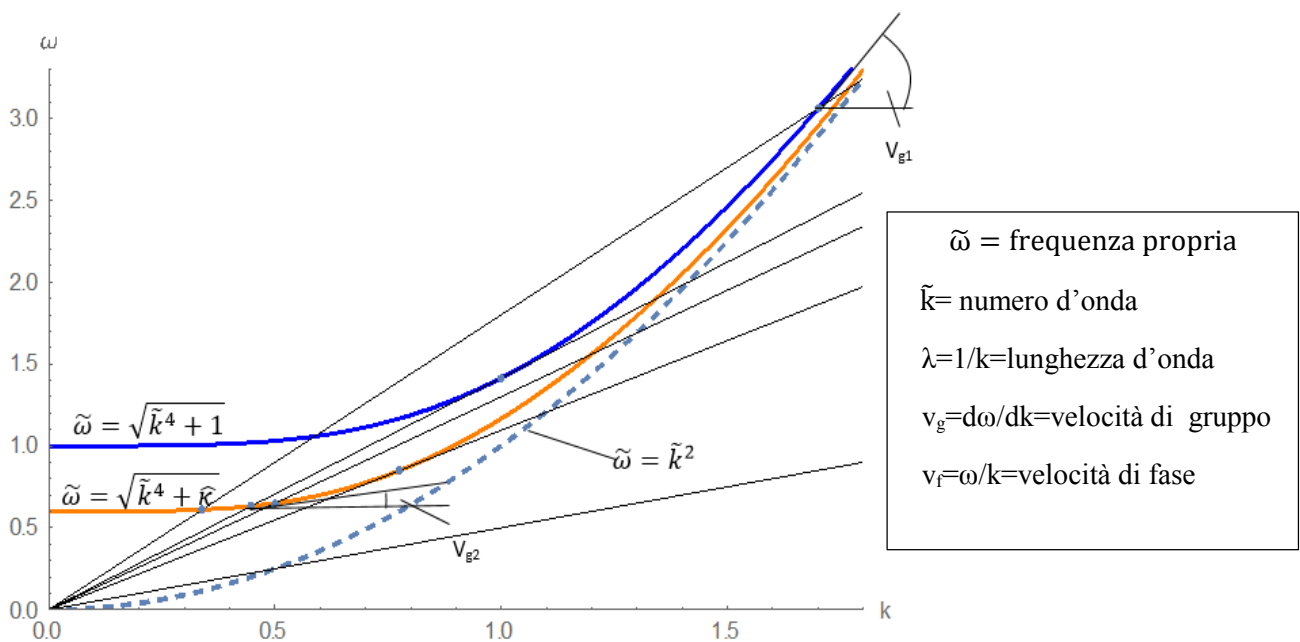
$$W(\eta) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{v^2}{2} - \sqrt{\frac{v^4}{4} - \hat{\kappa}}}\eta\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{\frac{v^2}{2} - \sqrt{\frac{v^4}{4} - \hat{\kappa}}}\eta\right) + \frac{(1 - \hat{\kappa})g}{\hat{\kappa}} \quad \eta \leq 0$$

Per verifica, le soluzioni $W(\eta)$, si sono riottenute anche attraverso i diagrammi di dispersione.

Partendo sempre dalla relazione di Eulero-Bernoulli si hanno:

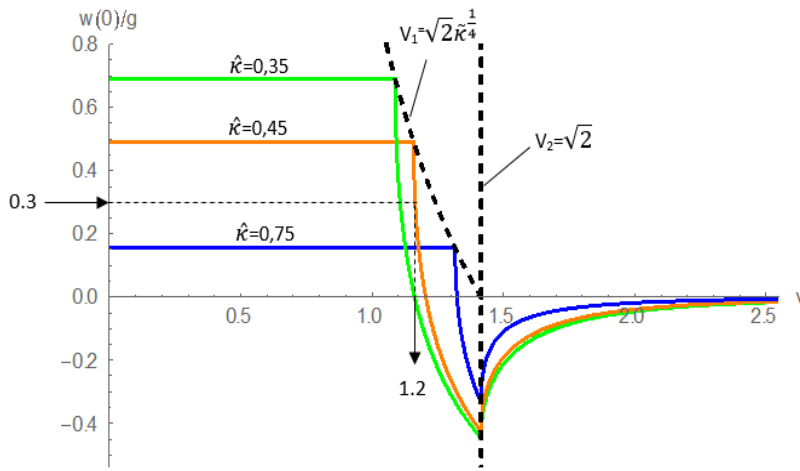
- Parte integra trave: $\tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{k}^4 + 1}$
- Parte lesionata trave: $\tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{k}^4 + \hat{\kappa}}$

Esse sono le curve di dispersione per i due domini che legano la frequenza propria al numero d'onda, inverso della lunghezza d'onda.



La scelta delle soluzioni è avvenuta attraverso l'applicazione delle condizioni di irraggiamento di Sommerfield. L'intersezione, tra le due curve e le varie possibili rette passanti per l'origine, individua dei punti che sono possibili soluzioni, tra queste bisogna scartare quelle fisicamente non ammissibili. Per la parte lesionata si escludono le soluzioni con velocità superiore rispetto a v , mentre per quella non lesionata quelle con velocità inferiore rispetto a v . Per quanto riguarda le curve di dispersione si applicano ugualmente le due condizioni al contorno: nella parte lesionata e quindi a sinistra della sezione di rottura, si scartano gli effetti provenienti dall'esterno del sistema, cioè da $\eta = -\infty$; mentre a destra della sezione di rottura dunque nella parte integra, si scartano gli effetti provenienti da $\eta = +\infty$, prodotti anche essi dall'esterno del sistema. All'interno del grafico sono stati rappresentati con dei pallini le sole soluzioni ammissibili.

Inserendo i risultati ottenuti per i tre regimi in un unico grafico, si può vedere l'andamento dello spostamento $w(0)$ in tutti i campi di velocità:



Le tre curve sono definite per $\hat{\kappa} = 0.35$, $\hat{\kappa} = 0.45$ e $\hat{\kappa} = 0.75$. Il primo tratto, parallelo all'asse delle ascisse, non è influenzato dalla variazione della velocità, e rappresenta lo spostamento statico. Il secondo intervallo è quello in cui si ha la propagazione della rottura, fino a quando lo

spostamento non assume valori negativi. Infine, nell'ultimo tratto si ha uno spostamento negativo in tutto il periodo, il che non è fisicamente ammissibile. Con le linee tratteggiate, al variare della rigidezza, vengono indicate le velocità limite tra il regime subsonico e intersonico, v_1 , e tra il regime intersonico e supersonico, v_2 .

Lo spostamento massimo di rottura è da individuare all'interno del regime di velocità compreso tra $\sqrt{2}\hat{\kappa}^{\frac{1}{4}}$ e la velocità che produce il minimo spostamento positivo, in relazione a fissata variazione di rigidezza $\tilde{\kappa}$. Data v è possibile conoscere il massimo spostamento che la struttura subirà prima del collasso e, viceversa, dato lo spostamento a rottura si saprà a quale velocità si propaga l'onda di rottura lungo la trave, es. per $w(0)/g=0,3$ si ha una velocità di propagazione di $v=1,2$.

Variatione di rigidezza e di massa

In un secondo studio si è preso in esame un caso più generico rispetto a quello esposto precedentemente: si valuta una possibile riduzione di massa, oltre che di rigidezza, tra la parte lesionata e non lesionata. In questo caso, la rottura può essere causata o dal cedimento di fondazione, esattamente come nel caso precedente, oppure a causa del lesionamento della trave da ponte. Si sono studiati i due casi di rottura separatamente. Di seguito si concentra l'attenzione sulle relazioni di dispersione, comuni ai due casi di danneggiamento. L'analisi è stata fatta per il solo caso subsonico. In questa trattazione, data la maggiore semplicità nel lavorare con le relazioni di dispersione, si è scelto di esaminare le curve di dispersione per poi passare allo studio dei diversi regimi di velocità.

L'analisi attraverso le curve di dispersione ha portato alla determinazione di sei possibili casi di studio di cui si riportano degli esempi numerici:

Tabella riassuntiva:

	$\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}}$	$\frac{\hat{D}}{\hat{m}}$	$\frac{\hat{D}}{\hat{m}} \frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}}$	ω_{int}	k_{int}	<i>Regime Subsonico</i>		<i>Regime Intersonico</i>		<i>Regime Supersonico</i>	
						I Estr.	II Estr.	I Estr.	II Estr.	I Estr.	II Estr.
1a	1,82	0,47	0,86	1,60	1,12	0	1,36	1,36	1,41	1,41	$+\infty$
1b	1,93	0,78	1,51	2,29	1,43	0	1,41	1,41	1,57	1,57	$+\infty$
2a	0,39	1,72	0,67	1,36	0,96	0	1,28	1,28	1,41	1,41	$+\infty$
2b	0,75	1,98	1,49	1,12	0,71	0	1,41	1,41	1,56	1,56	$+\infty$
3	0,48	0,74	0,33	-	-	0	1,07	1,07	1,41	1,41	$+\infty$
4	1,45	1,24	1,80	-	-	0	1,41	1,41	1,64	1,64	$+\infty$

Tab.1 Esempi numerici dei casi legati ai diagrammi di dispersione. Con I Estr. e II Estr. si indicano gli estremi, sinistro e destro, dei tre regimi di studio. Le grandezze ω_{int} e k_{int} sono rispettivamente la frequenza propria e il numero d'onda nel punto di intersezione delle curve rappresentanti parte lesionata e non lesionata.

Ricapitolando: in questa analisi si sono potuti definire sei intervalli di studio che, a seconda dei valori attribuiti alle grandezze $\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}}$, $\frac{\hat{D}}{\hat{m}}$ e $\frac{\hat{D}}{\hat{m}} \frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}}$, presentano estremi differenti. Sono stati dimostrati i casi sopracitati dal punto di vista dello spostamento e in funzione delle cause di collasso differenti. Questo tipo di considerazione consente l'esclusione di alcuni di essi nella propagazione dell'onda di rottura.

- **Cedimento dell'appoggio di fondazione**

Si prende in analisi il caso di cedimento dell'appoggio di fondazione in cui si trova, tra la parte lesionata e non lesionata, oltre ad una variazione di rigidità anche una variazione di massa. Per poter riprodurre questo caso, le grandezze assumono i valori: $\frac{\hat{D}}{\hat{m}} \geq 1$, $\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} \geq 1$ oppure $\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} \leq 1$ e $\hat{D} = \frac{D_2}{D_1} = 1$. Riprendendo i risultati ottenuti con le curve di dispersione, i casi in cui ci si può trovare sono: 2a, 2b e 4, poiché solo in essi il rapporto $\frac{\hat{D}}{\hat{m}} \geq 1$.

Questo tipo di rottura non comporta alcuna variazione della rigidità flessionale, giustificato dal fatto che la perdita di massa avviene o nella fondazione o in una parte della trave che non influenza in modo significativo la sezione di resistenza.

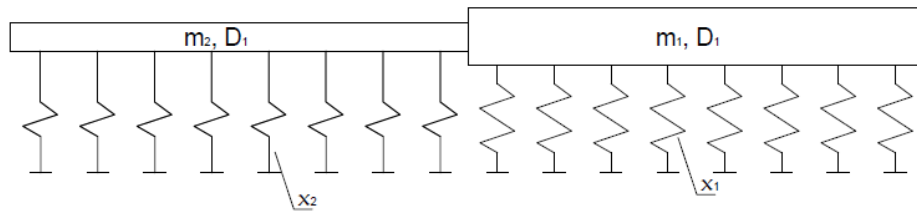


Fig.5 Modello di trave su appoggio elastico, con sezione di rottura e variazioni delle grandezze in uso.

Applicando le ipotesi suddette, le equazioni di studio sono:

$$\bar{W}^{IV}(\tilde{\eta}) + \tilde{\nu}^2 \bar{W}^{II}(\tilde{\eta}) + \bar{W}(\tilde{\eta}) = 0 \quad \text{per } \tilde{\eta} \geq 0,$$

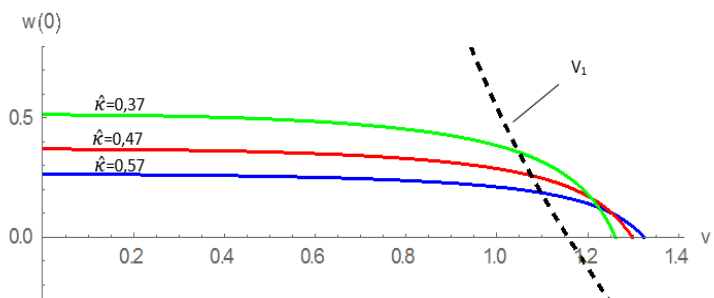
$$\bar{W}^{IV}(\tilde{\eta}) + \hat{m} \tilde{\nu}^2 \bar{W}^{II}(\tilde{\eta}) + \hat{\kappa} \bar{W}(\tilde{\eta}) = \tilde{g}(\hat{m} - \hat{\kappa}) \quad \text{per } \tilde{\eta} \leq 0.$$

Anche per questa analisi il Criterio di rottura adottato è lo spostamento trasversale.

Si riportano le sole soluzioni ammissibili:

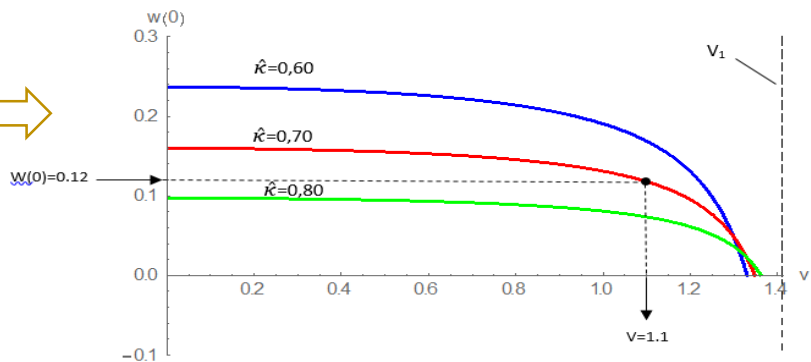
Caso 2a

$$\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} < 1, \frac{\hat{D}}{\hat{m}} > 1 \text{ e } \frac{\hat{D}}{\hat{m}} \frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} < 1$$



Caso 2b

$$\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} < 1, \frac{\hat{D}}{\hat{m}} > 1 \text{ e } \frac{\hat{D}}{\hat{m}} \frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} > 1$$



Caso 4

$$\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} > 1, \frac{\hat{D}}{\hat{m}} > 1 \text{ e } \frac{\hat{D}}{\hat{m}} \frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} > 1$$

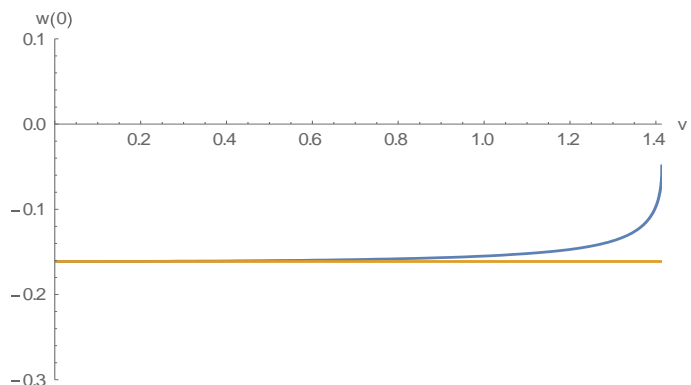


Tabella riassuntiva:

	\widehat{D}	$\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}}$	$\frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}}$	$\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}} \frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}}$	v	S statico $\eta=0$	S dinamico $\eta=0$
Caso 2a	1	1,72	0,39	0,67	0,8	0,505	0,456
Caso 2b	1	1,98	0,75	1,49	0,8	0,481	0,425
Caso 4	1	1,24	1,45	1,80	0,8	0,505	0,456

Tab.2 Esempi numerici dei casi esaminati.

Ricapitolando: sulla base dei risultati ottenuti in questa analisi, si può notare che, nel caso di cedimento della fondazione con produzione di variazione di massa e di rigidezza, la propagazione dell'onda di rottura avviene unicamente nel caso 2a, $\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}} > 1$, $\frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}} < 1$ e $\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}} \frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}} < 1$, e 2b, $\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}} > 1$, $\frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}} < 1$ e $\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}} \frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}} > 1$, almeno fino a quando lo spostamento non risulti negativo per specifiche velocità.

- **Danneggiamento trave da ponte**

Si prende in analisi il caso di collasso della trave da ponte in cui si ha, tra la parte lesionata e non lesionata, oltre ad una variazione di rigidezza e di massa anche una variazione di rigidezza flessionale. Si sta ipotizzando una perdita di massa con variazione della sezione di resistenza nella parte di trave lesionata. Le grandezze assumono i valori: $\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}} \geq 1$ oppure $\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}} \leq 1$, $\frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}} \geq 1$ oppure $\frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}} \leq 1$ e $\widehat{D} < 1$. Riprendendo i risultati ottenuti con le curve di dispersione, i casi 1a, 1b, 2a, 2b, c e d sono tutti possibili casi di studio.

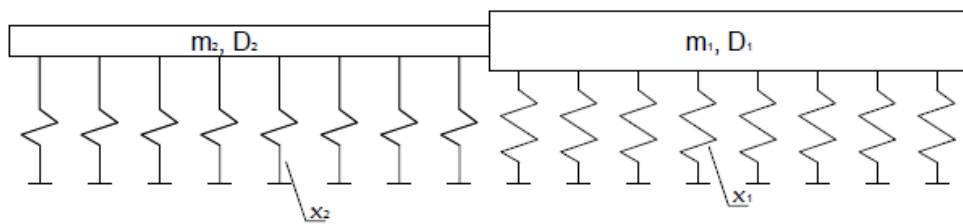


Fig.6 Modello di trave su appoggio elastico, con evidenziata la sezione di rottura e le grandezze in uso.

Applicando le condizioni suddette, le equazioni di studio sono:

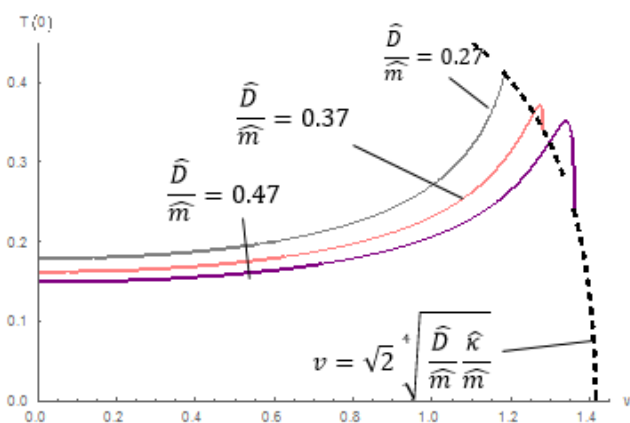
$$\overline{W}^{IV}(\tilde{\eta}) + \tilde{v}^2 \overline{W}^{II}(\tilde{\eta}) + \overline{W}(\tilde{\eta}) = 0 \quad \text{per } \tilde{\eta} \geq 0,$$

$$\widehat{D} \overline{W}^{IV}(\tilde{\eta}) + \widehat{m} \tilde{v}^2 \overline{W}^{II}(\tilde{\eta}) + \widehat{\kappa} \overline{W}(\tilde{\eta}) = \tilde{g}(\widehat{m} - \widehat{\kappa}) \quad \text{per } \tilde{\eta} \leq 0.$$

Nel caso di rottura della trave da ponte, come causa di collasso della struttura, lo spostamento non può essere considerato un valido criterio di rottura. Non dà alcuna indicazione sulle condizioni di limite ultimo della struttura, come invece avviene se la causa di collasso è il cedimento del pilastro d'appoggio. Quindi, è stato necessario analizzare le azioni interne della trave e valutare caso per caso se potessero essere dei validi criteri di rottura.

Il taglio è stato riscontrato come un possibile criterio di rottura nel caso di lesione della trave da ponte. Nel caso del momento, la soluzione stazionaria è instabile e fisicamente non potrà essere raggiunta. È possibile che si raggiunga una soluzione stazionaria diversa, con un criterio di rottura o non puntuale o in cui la velocità stazionaria è sovrapposta a un'oscillazione del punto, ma con le ipotesi prese per questo studio non può essere considerato un buon criterio di rottura.

Quindi, per la scelta delle soluzioni ammissibili nel caso della rottura della trave da ponte è stato preso come criterio di rottura il Taglio. Si è svolta l'analisi per tutti e sei i casi determinati con le curve di dispersione. Per velocità espositiva si riporta il solo caso 1a:



Si è rappresentato l'andamento del taglio T , in $\eta=0$, per un valore di $\widehat{D} = 0.30$, le tre curve sono descritte per differenti valori di $\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}}$, rispettivamente pari a 0.27, 0.37, 0.47. Con la curva tratteggiata si indica il limite di velocità tra il regime subsonico e intersonico, $v = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}} \frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}}}$, tale limite è strettamente legato a quali valori dei rapporti $\frac{\widehat{D}}{\widehat{m}}$ e $\frac{\widehat{\kappa}}{\widehat{m}}$ vengono presi.

Questo diagramma da solo non ci permette di determinare le sole soluzioni ammissibili.

Per comprendere le soluzioni da escludere si riporta in Fig.5.13 il limite della funzione, data del prodotto tra taglio e la sua derivata, $T \cdot T'$, al tendere di η a zero:

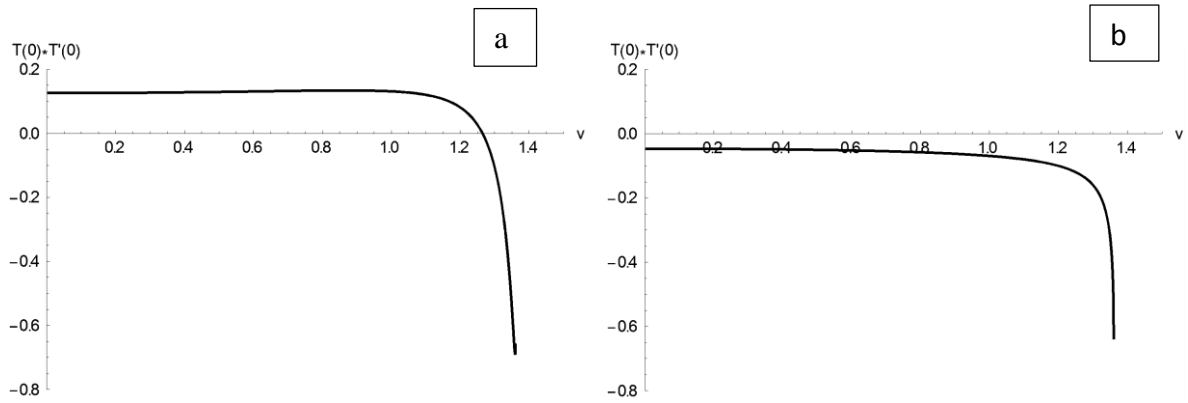


Fig.7 a. Limite, per $\eta \rightarrow -0$, della funzione taglio per la sua derivata, al variare della velocità in regime subsonico, con le grandezze $\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} = 1.82, \frac{\hat{D}}{\hat{m}} = 0.47, \hat{D} = 0.30$; b. Limite, per $\eta \rightarrow +0$, della funzione taglio per la sua derivata, al variare della velocità in regime subsonico, con le grandezze $\frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}} = 1.82, \frac{\hat{D}}{\hat{m}} = 0.47, \hat{D} = 0.30$.

Attraverso questi diagrammi si esamina il valore del prodotto tra taglio e la sua derivata. Le condizioni di massimo taglio prevedono che in $\eta=0$, il prodotto delle due grandezze deve essere, da destra positivo (+0), mentre da sinistra negativo (-0). In Fig.5.13a si è descritto il prodotto T^*T' al tendere di $\eta \rightarrow +0$, questo assume un valore positivo fino ad un certo valore di velocità, oltrepassato il quale T^*T' diviene negativo. Un valore negativo del prodotto tra taglio e sua derivata, indica che il taglio non è più massimo nella sezione di rottura, come esplicitato negli esempi in Fig.5.12a e 5.13b.

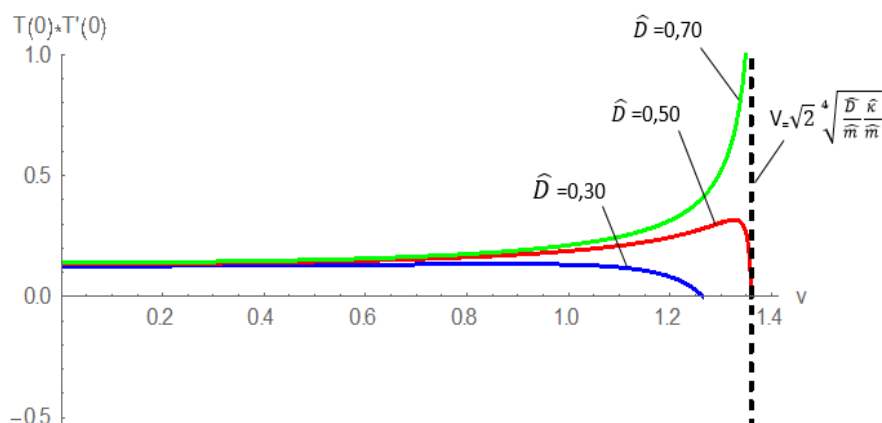
In Fig.5.13b si è rappresentato, invece, il prodotto T^*T' al tendere di $\eta \rightarrow -0$, questo assume un valore sempre negativo, per questa parte il valore assunto è sempre massimo, il problema è quindi nella parte lesionata, che non rispetta le condizioni di massimo. Questo permette perciò la determinazione delle sole soluzioni ammissibili all'interno del regime di velocità subsonico,

compreso tra 0 e $\sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\hat{D}}{\hat{m}} \frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}}}$. Le soluzioni sono espresse nella forma di prodotto tra taglio e la sua

derivata, nella sezione di rottura, al variare della velocità. Con la curva tratteggiata si è rappresentata

la velocità limite $v = \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\hat{D}}{\hat{m}} \frac{\hat{\kappa}}{\hat{m}}}$. Data v, è possibile conoscere il massimo taglio che la struttura subirà,

a meno del valore della sua derivata, prima che avvenga il collasso e, viceversa, dato il taglio massimo si saprà a quale velocità si propaga l'onda di rottura lungo la trave.



In conclusione:

L'obiettivo principale da raggiungere è stato quello di ricercare a quali velocità l'onda di rottura si potesse propagare nel solido in esame, quale una struttura da ponte, a seconda del tipo di collasso ipotizzato. Inoltre si è evidenziato il tipo di criterio di rottura compatibile con il modello di collasso esaminato.

Nella prima parte del lavoro, si è effettuato lo studio del cedimento del supporto elastico, legato alla variazione di rigidezza. Si è arrivati a determinare che il possibile criterio di rottura compatibile con il collasso ipotizzato, sia lo spostamento della sezione di rottura. Tale analisi ha portato a stabilire che la velocità che garantisce la propagazione dell'onda di collasso, si trovi nel regime intersonico. Però tutte le velocità comprese in tale range, non garantiscono questa propagazione, ma solo quelle che, per la specifica variazione di rigidezza, determinano uno spostamento positivo (cedimento), nella sezione di rottura.

Nella seconda parte del lavoro, si sono valutati ulteriori parametri, che variano tra parte lesionata e non lesionata. Oltre alla variazione di rigidezza, si è aggiunta anche la variazione di massa. Questo ha determinato lo studio di due collassi differenti, per primo si è analizzato il collasso causato dalla rottura del supporto elastico, differente da quello analizzato nella prima parte del lavoro, e come secondo il collasso causato dal danneggiamento della trave da ponte, in cui si è ipotizzata anche una variazione della resistenza flessionale. In entrambi gli studi si è analizzato il solo regime subsonico. Vista la complessità di questa parte di lavoro, a causa dell'introduzione di un numero maggiore di grandezze influenzate dalle variazioni causate dal collasso, si è preferito suddividere l'analisi in sei casi di studio.

Nel collasso a seguito del cedimento dell'appoggio di fondazione, rientrano solo tre dei casi di studio previsti. Il tipo di criterio di rottura è stato, anche in questa analisi, lo spostamento della sezione di

rottura. Si è arrivati a determinare che l'onda di rottura viene propagata in tale regime subsonico solo nel caso 2a, $\frac{\bar{D}}{\bar{m}} > 1$, $\frac{\bar{\kappa}}{\bar{m}} < 1$ e $\frac{\bar{D}}{\bar{m}} \frac{\bar{\kappa}}{\bar{m}} < 1$, e 2b, $\frac{\bar{D}}{\bar{m}} > 1$, $\frac{\bar{\kappa}}{\bar{m}} < 1$ e $\frac{\bar{D}}{\bar{m}} \frac{\bar{\kappa}}{\bar{m}} > 1$, inoltre solo fino a che lo spostamento, per data velocità, non risulti negativo (sollevamento).

Nel collasso a seguito del danneggiamento della trave da ponte, rientrano tutti e sei i casi di studio previsti. Il tipo di criterio di rottura non può più essere lo spostamento, in quanto non compatibile, si è allora ricercato tra le azioni interne della trave: taglio e momento. I risultati hanno portato in luce che, nel regime subsonico, solo il taglio può essere considerato come criterio di rottura valido. Quindi, in funzione del taglio, si è stabilito che l'onda di rottura si propaga per velocità subsoniche fino a quando il taglio non è più il massimo proprio nella sezione di rottura. Questo è vero per tutti i sei casi.

Il presente lavoro risulta di forte utilità nell'analisi della propagazione del danneggiamento in strutture snelle. Sebbene l'analisi sia ristretta al regime stazionario essa conduce alla determinazione della stabilità della transizione fornendo le condizioni per cui il regime stazionario possa essere raggiunto o meno.

Il modello si basa su un appoggio elastico diffuso; sebbene questo introduca un'approssimazione, è stato dimostrato in *Brun, Slepyan, Movchan-Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 61, 10, 2067-2085*, che i risultati siano applicabili a pilastri disposti ad una certa distanza.

Riferendoci al caso del ponte in Texas, si è stati in grado di determinare la velocità limite superiore di propagazione dell'onda di rottura:

$$v = \left(\frac{D \kappa}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 24.3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Dove:

D = rigidezza flessionale

κ = rigidezza della fondazione

ρ = densità della struttura



Si è determinata la velocità di propagazione del collasso, che è all'incirca di: $v = 22.4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.